UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Conjuntos de von Neumann e os Fundamentos da Física Clássica

Ana Paula Novak Ramos Quirino

CURITIBA - PR
2004

Conjuntos de von Neumann e os Fundamentos da Física Clássica

Ana Paula Novak Ramos Quirino

Orientação:
Prof Adonai S. Sant'Anna

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada, Curso de Pós-graduação em Matemática Aplicada, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

UFPR - CURITIBA
2004

TERMO DE APROVAÇÃO

Ana Paula Novak Ramos Quirino

"Conjuntos de Von Neumann e os Fundamentos da Física Clássica"

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná

Prof Adonai S. Sant'Anna (Orientador):__________
Departamento de Matemática/UFPR

Prof Newton Carneiro Affonso da Costa:__________
Universidade Federal de Santa Catarina/UFSC

Prof Décio Krause:__________
Universidade Federal de Santa Catarina/UFSC

Prof José Carlos Cifuentes:__________
Departamento de Matemática/UFPR

Curitiba, 17 fevereiro de 2004

Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMAT

ATA DA 1ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos dezessete dias do mês de fevereiro de 2004, no Anfiteatro B - Prédio PC/ET, Universidade Federal do Paraná, foi instalada pelo Professor Higidio Portillo Oquendo, Coordenador do PGMAT - Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, a Banca Examinadora para a Primeira Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Estiveram presentes ao Ato, além do Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, professores, alunos e visitantes.

A banca examinadora, homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, ficou constituída pelos professores: Dr. Décio Krause, da UFSC; Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa, da UFSC; Dr. José Carlos Cifuentes Vasquez, do Departamento de Matemática da UFPR e Dr. Adonai Schlup San'Anna, do Departamento de Matemática da UFPR, orientador da dissertação a quem coube a presidência dos trabalhos.

Às dez horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando a candidata **Ana Paula Novak Ramos Quirino** a fazer a apresentação do tema da dissertação intitulada "Conjuntos de Von Neumann e os Fundamentos da Física Clássica". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de argüição pelos membros participantes. Após a argüição, a banca com pelo menos 03 (três) membros, reuniu-se para apreciação do desempenho da pós-graduanda.

A banca considerou que a pós-graduanda fez uma apresentação com a necessária concisão. A Dissertação apresenta contribuição à área de estudos e não foram registrados problemas fundamentais de estrutura e redação, resultando em plena e satisfatória compreensão dos objetivos pretendidos.

Tendo em vista a dissertação e a argüição, os membros presentes da banca decidiram pela sua aprovação.

Curitiba, 17 de fevereiro de 2004.

Prof. Adonai Schlup San'Anna
Presidente

Prof. Décio Krause

Prof. Newton Carneiro Affonso da Costa

Prof. José Carlos Cifuentes Vasquez

PARECER DA BANCA EXAMINADORA

Após a apresentação da candidata, a banca fez a sua arguição, na qual várias questões que podem contribuir para maior clareza e profundidade dos resultados, foram apontadas, as quais a candidata se comprometeu a incorporar na versão final da dissertação.

Curitiba, 17 de fevereiro de 2004.

Prof. Adonai Schlup Sant'Anna
Presidente

Prof. Décio Krause

Prof. Newton Carneiro Affonso da Costa

Prof. José Carlos Cifuentes Vasquez

Dedico a todos que, direta

ou indiretamente, contribuiram

para a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

ESPECIAIS

Professor Doutor Adonai S. Sant'Anna

Professor Doutor José Carlos Cifuentes

Professor Livre Docente Aurélio Sartorelli

Professor Doutor Liangzhong Hu

Professor Doutor Newton Carneiro Affonso da Costa

Professor Doutor Décio Krause

Tomas Keller Breuckmann

FAMILIARES

Edson, meu marido

Dilma e Paulo, meus pais

Paulo Rogerio e Ana Carolina, meus irmãos

Dirce, minha avó

Sumário

Resumo

Apresentamos aqui uma breve discussão sobre resultados envolvendo a definibilidade e, portanto, eliminabilidade de tempo e espaço-tempo como conceitos primitivos em certas formulações axiomáticas para teorias físicas clássicas. Usamos tais resultados como motivação para o uso de uma teoria de conjunto aternativa como fundamnetação para teorias físicas que não fazem menção explícita a tempo e espaço-tempo. Tal teoria de conjunto alternativa parte do pressuposto de que a noção intuitiva fundamental é a de função e não a de conjunto. Assuntos correlatos são discutidos.

Abstract

We present a brief discussion about the definability and, so, the eliminability of time and spacetime as primitive concepts in some axiomatic frameworks for classical physical theories. We use the results in order to motivate the employment of and alternative set theory as a foundation for physical theories which do not explicitly mention time and spacetime, Such an alternative set theory considers that the most fundamental intuitive notion is the concept of function rather than the very notion of set. relate the subjects are discussed.

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho, a principal ferramenta utilizada é o método axiomático. O método axiomático remonta ao tempo de Euclides de Alexandria com seu livro *Elementos*, o qual é a mais antiga obra de sistematização da matemática. O livro *Elementos* foi escrito utilizando-se uma estrutura lógico-dedutiva a partir da qual foi possível obter muitos resultados por meio de poucos "princípios", chamados de axiomas e postulados. De fato, *Elementos* é o exemplo de sistematização mais conhecido da antiga matemática grega.

O método axiomático é utilizado até hoje em dia, não só em matemática, mas também na formulação de muitas teorias físicas, como a mecânica newtoniana, a termodinâmica, o eletromagnetismo, entre outras. O matemático alemão David Hilbert, em 1900, já havia apresentado uma histórica palestra na qual formulou 23 problemas que, em sua opinião, eram o legado dos matemáticos do século XIX aos do século XX. Dentre esses problemas, o sexto era referente justamente à axiomatização das ciências físicas [9], que foi introduzido como se segue: "Investigações sobre os fundamentos da geometria sugerem o problema: *tratar do mesmo modo, por meio de axiomas, as ciências físicas nas quais a matemática tem importante papel: são prioritárias a teoria de probabilidades e a mecânica.*".

Dessa forma, Hilbert deixava claro que "o rigor matemático poderia existir em qualquer ramo da ciência em que a matemática estivesse de alguma forma subjacente" [9]. Portanto, isso nos leva a estudar e explorar, do ponto de vista axiomático, teorias físicas. As motivações e alguns desdobramentos sobre os problemas de Hilbert e, em particular o sexto, podem ser encontrados em [3].

O método axiomático tem se mostrado necessário e até indispensável se o cientista quer responder a certas questões sobre fundamentos lógico-matemáticos de alguma disciplina da física. Isso se deve ao forte apelo lógico do método axiomático, o qual conta com inúmeras técnicas bem conhecidas para tratar de questões de caráter lógico. Uma dessas técnicas é o método de Padoa, sobre o qual discutimos adiante.

Em [5] e [6] os autores provam que tempo é definível e, portanto, eliminável (em acepção precisa) de certas formulações bastante naturais de certas teorias da física como a mecânica newtoniana e a termodinâmica. Eles também provam que de forma análoga espaço-tempo é dispensável na relatividade geral, nas teorias de *gauge* clássicas, no elétron de Dirac, no eletromagnetismo de Maxwell e na mecânica hamiltoniana. Um de nossos objetivos é discutir essa noção de eliminabilidade, bem como maneiras de reformular tais teorias físicas sem a noção explícita de tempo e de espaço-tempo.

Em lógica, pode-se dizer que um conceito primitivo c é definível a partir dos demais conceitos em um certo sistema axiomático S se, e somente se, existe alguma maneira (podendo ser, por exemplo, por meio de uma fórmula bem formada) que fixa o significado de c em termos dos demais conceitos de S, de forma que o critério de eliminabilidade seja satisfeito. As definições que usamos neste contexto são formadas por um *definiendum* (objeto a ser definido) e um *definiens* (fórmula que efetivamente define o *definiendum*). O critério de eliminabilidade exige que a qualquer momento seja possível eliminar o *definiendum* substituindo o mesmo pelo *definiens*.

Um exemplo simples é o seguinte: na classe dos triângulos, considere aqueles que possuem ângulo interno reto. Dizemos que "ter um ângulo interno reto " é uma característica especial de alguns triângulos. Assim, definimos que os triângulos que têm essa característica especial, são os triângulos retângulos. Portanto, nesse exemplo temos o *definiendum* (o conceito de triângulo retângulo) e o *definiens* (triângulo que tem um ângulo interno reto).

Dizemos que o conceito c é independente dos demais se não é definível em S. Caso contrário, é dependente.

Nesse sentido "tempo" é eliminável por ser usualmente descrito como um conjunto definível a partir de funções que correspondem a grandezas físicas.

Podemos chegar a esse resultado de eliminabilidade usando o célebre Princípio de Padoa, que estabelece que, quando aplicado a uma teoria axiomática S, um conceito c_i é independente (ou seja, não definível) dos demais se, e somente se, existem dois modelos de S nos quais os demais conceitos permanecem com a mesma interpretação, enquanto o conceito c_i tem diferentes interpretações nos dois modelos [22]. E é dessa forma que chegamos ao problema mencionado anteriormente: o fato de que, em algumas teorias, existem conceitos elimináveis. Em particular, em certas formulações bastante naturais (no sentido de estarem na bibliografia padrão sobre o assunto), de certas teorias físicas, os conceitos de tempo e espaço-tempo são *elimináveis*. O principal motivo que justifica esse resultado é fato de que comumente tempo e espaço-tempo são entendidos como conjuntos que servem de domínios para funções que podem representar campos de forças, massas e posições. As funções usadas para corresponderem a forças ou massas são indispensáveis. Mas os conjuntos usados como domínios para tais funções são definíveis a partir das próprias funções.

Um dos problemas dessa eliminabilidade de tempo e espaço-tempo ocorre quando reescrevemos, por exemplo, a mecânica newtoniana sem tempo. No escopo da teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, isso nos conduz a um resultado um tanto desagradável. Notamos que reescrever mecânica newtoniana sem tempo acaba por sobrecarregar a notação com novas definições e axiomas bem mais difíceis de ler, pelo menos do ponto de vista do físico profissional, o qual não está interessado a princípio em notações sobrecarregadas. Acreditamos que isso acontece por que em Zermelo-Fraenkel o conceito intuitivo que serve de base para orientar intuições é o de conjunto e não o de função. Com isso, nossa principal meta é fundamentar teorias da física em uma teoria de "conjuntos" na qual a noção intuitiva fundamental seja a de função e não a de conjunto. Já existem algumas propostas parecidas com essa. Em [25], por exemplo, a autora diz:

> A noção intuitiva de função pode ser formalizada, em teoria dos conjuntos, como uma tripla ordenada $f = (A, B, R)$, onde R (um subconjunto do produto cartesiano entre A e B) é uma relação de A em B (o gráfico de f), tal que para todo x pertencente a A existe um e apenas um y pertencente a B tal que (x, y) pertence a R. Nessa definição, função é um conjunto, um objeto fixo, estático. Isso não reflete o caráter "operacional", de "transição", que faz parte do seu conceito intuitivo. Expressões como "aplicar uma função a um argumento" ou "uma função agindo em um domínio" transmitem a idéia de ação, movimento, o que é evidenciado pelo uso do símbolo de flecha. É similar à idéia transmitida ao se falar em uma força física agindo sobre um objeto. Em matemática aplicada, força pode ser descrita como um campo de vetores da variedade que modela o espaço-tempo, ou seja, é um certo operador (função) cujo domínio é um determinado espaço de funções. Além disso, em geometria, transformações (rotações, reflexões, dilatações etc.) são, também, certas funções que sugerem algo como "movimento". O caráter dinâmico que temos frisado aqui é parte essencial da palavra *função* como usada em

> matemática. A definição conjuntista de função como conjunto de pares ordenados não tem em si esse caráter. Ela é um "modelo conjuntista"da idéia de função, que captura alguns de seus aspectos, mas não o seu completo significado intuitivo.
>
> A idéia de se representar uma função com o símbolo de uma flecha surgiu pela primeira vez em topologia por volta de 1940, nos artigos de W. Hurewicz sobre homotopia relativa de grupos. Sua iniciativa chamou a atenção de R. H. Fox e N. E. Steenrod, os quais usaram funções denotadas por flechas. A notação $f : X \to Y$ substituiu, então, a ocasional notação "$f(X)$ é subconjunto de Y" para funções. O uso, então, do símbolo de flecha acabou por sugerir o conceito de categoria.

Uma possível fundamentação para teorias da física é de fato a teoria de categorias, como alguns já propuseram (ver [19] bem como as referências lá citadas). Aqui, inspirados em sugestões pessoais de Adonai S. Sant'Anna, queremos testar uma rota alternativa, para fins de comparação em trabalhos futuros. Mais precisamente, inspirados na proposta de John von Neumann [26] para uma teoria de "conjuntos" na qual conjuntos são definíveis a partir de funções, criamos uma versão muito mais simplificada das idéias de von Neumann (sem classes), com o propósito de usá-la para fundamentar teorias da física. Na presente dissertação aplicamos nossas idéias explicitamente apenas na mecânica newtoniana de partículas e na formulação axiomática devida a McKinsey e colaboradores [16]. No entanto, queremos testar esse *framework* futuramente em outras teorias também.

P. Suppes em seu livro *Representation and Invariance of Scientific Structures* [23], afirma: "axiomatizar uma teoria é definir um predicado em termos de noções da teoria de conjuntos". A linguagem de uma teoria axiomatizada como predicado conjuntista é a mesma da teoria de conjuntos. A mais comum é a de Zermelo-Fraenkel. Mas queremos investigar algumas das idéias de von Neumann com o intuito de estudar a reformulação de teorias físicas sem tempo ou espaço-tempo no âmbito de uma teoria de conjuntos onde a noção fundamental é a de função e não a de conjunto. Nossa meta é verificar se uma reformulação de teorias físicas sem tempo, sem espaço-tempo e fundamentadas em uma teoria à la von Neumann, não fica mais simples e atraente para o físico profissional. Não estamos buscando resultados novos em física e nem em lógica. Estamos simplesmente buscando uma maneira de "enxugar" a notação usualmente empregada em física, a qual provamos adiante que está repleta de conceitos definíveis e, portanto, elimináveis.

No Capítulo 2 damos uma idéia mais detalhada do princípio de Padoa, o qual é utilizado nas demonstrações referentes a eliminabilidade ou não de conceitos primitivos em determinadas teorias.

Conforme [5], sabemos que o conceito de tempo é eliminável no sistema MSS (abreviação que utilizamos para a proposta de McKinsey e colaboradores para a mecânica newtoniana de partículas [16]), utilizando o princípio de Padoa. No Capítulo 3 exibimos esse resultado, além de outros, e damos uma formulação desse sistema sem o conceito de tempo, no âmbito da teoria de Zermelo-Fraenkel. Também nesse Capítulo, encontram-se formulações para espaço vetorial sem o conjunto de vetores e teoria de grupos sem o conjunto G de elementos do grupo.

A teoria proposta neste trabalho é apresentada com mais detalhes no Capítulo 4.

No Capítulo 5, aplicamos a teoria $\mathcal{N}$ apresentada no Capítulo anterior, ao sistema MSS e também à teoria de grupos.

Uma discussão sobre sistemas autônomos e não autônomos pode ser vista no Capítulo 6, com o objetivo de detalhar o que significa eliminabilidade de tempo em diferentes acepções.

O Capítulo 7 é dedicado a outras teorias físicas nas quais podemos, a princípio, aplicar a teoria $\mathcal{N}$.

Finalmente, no Capítulo 8, apresentamos algumas questões em aberto e as conclusões finais deste trabalho.

Queremos enfatizar que essa dissertação tem duas metas principais: (1) discutir certos resultados de eliminabilidade em teorias axiomáticas, com ênfase em teorias físicas e (2) introduzir a possibilidade de uma fundamentação de teorias da física em uma teoria de conjuntos inspirada na teoria original de von Neumann. Não foi possível desenvolver com os devidos detalhes tal fundamentação. No entanto, apresentamos aqui os axiomas de nossa teoria de conjuntos (ou, pelo menos, um esboço dos mesmos) e esperamos que este projeto tenha continuidade em algum momento futuro.

Capítulo 2

Definições e o Princípio de Padoa

Neste capítulo, vamos falar sobre o Princípio de Padoa, o qual pode ser empregado para mostrar a independência de um determinado conceito em relação aos demais.

Esse método foi introduzido em 1900 por Alessandro Padoa, nascido em Veneza, no dia 14 de outubro de 1868. Padoa estudou engenharia na cidade de Padua e concluiu um curso na área de matemática na Universidade de Turin, em 1895.

Fortemente influenciado pela escola de Peano de lógica matemática, Padoa apresentou uma palestra, em 1900, no Congresso Internacional de Filosofia em Paris. Nessa palestra, "Ensaio sobre uma teoria algébrica de números inteiros, precedida por uma introdução lógica a qualquer teoria dedutiva" (em francês), Padoa anunciava um importante método em teoria da definição. Ele esboçou uma técnica que permite verificar se um dado conceito primitivo de uma teoria era definível a partir dos demais conceitos primitivos da mesma. Mas somente décadas mais tarde, com trabalhos devidos a Tarski, McKinsey e Beth (ver [24], [15] e [2]), é que um maior impacto do seu trabalho foi sentido.

Padoa faleceu em Gênova, em 1937, aos 69 anos de idade.

2.1 Independência de Símbolos Primitivos

O Princípio de Padoa pode ser empregado para provar tanto a independência (não definibilidade) de conceitos como constantes individuais, relações ou operações, quanto a definibilidade (ou dependência) dos mesmos. Aqui, neste trabalho, tratamos de definições em um sentido intuitivo. No entanto, todos os nossos resultados podem, a princípio, ser estendidos para teorias de definição como as de Tarski [24] e de Leśniewski [22].

O Princípio de Padoa dá uma condição necessária e suficiente para independência de conceitos ([2], [22] e [24]), e estabelece que:

> Seja S uma teoria axiomática cujos conceitos primitivos (excluindo constantes lógicas) são $c_1, c_2, \cdots, c_n$. Tais conceitos, como já foi dito, podem ser constantes individuais, relações ou operações. Um dado conceito c_i é independente (não definível) dos conceitos $c_1, c_2, \cdots, c_{i-1}, c_{i+1}, \cdots, c_n$ se, e somente se, existem dois modelos de S nos quais $c_1, c_2, \cdots, c_{i-1}, c_{i+1}, \cdots, c_n$ têm a mesma interpretação, mas as interpretações de c_i nesses modelos são diferentes.

Grosseiramente falando, devemos ressaltar que um modelo de S é uma estrutura conjuntista na qual todos os axiomas de S são verdadeiros, de acordo com a interpretação dos conceitos primitivos de S [20].

Também é importante lembrar que, de acordo com a teoria da definição [22], uma definição deve satisfazer o critério de eliminabilidade, no qual um símbolo definido deve sempre ser eliminável de qualquer fórmula da teoria, no sentido de que sempre é possível eliminar o *definiendum* substituindo-o pelo *definiens*.

No capítulo 3, vemos alguns exemplos de aplicações desse princípio.

Capítulo 3

Conceitos Elimináveis em MSS

Apresentamos aqui uma formulação introduzida por McKinsey, Sugar e Suppes em 1953 para a mecânica clássica de partículas [16], o chamado sistema MSS.

O sistema MSS tem os seguintes conceitos primitivos: P que, intuitivamente, corresponde ao conjunto de partículas; T, o qual é um intervalo de números reais que, intuitivamente, corresponde a um intervalo de tempo; s, que denota uma função vetorial definida no produto cartesiano $P \times T$, com imagens em $\mathbb{R}^3$ usual e que interpretamos como indicando a posição de uma partícula p no instante t; m, que é uma função real definida em P e interpretada como a massa de uma partícula p; f, que é uma função vetorial definida no produto cartesiano $P \times P \times T$, com imagens em $\mathbb{R}^3$ usual e interpretada como a força interna que uma partícula p exerce sobre uma partícula q no instante t; e g, que é uma função vetorial definida no produto cartesiano $P \times T$, com imagens em $\mathbb{R}^3$ usual e interpretada como a força externa agindo sobre uma partícula p no instante t.

Definição 3.1 $\mathbb{P} = \langle P, T, s, m, f, g \rangle$ *é um sistema MSS se os seguintes axiomas forem satisfeitos:*

P1 *P é um conjunto finito não vazio.*

P2 *T é um intervalo de números reais.*

P3 *s é uma função com domínio $P \times T$ e codomínio $\mathbb{R}^3$.*

As imagens de s são denotadas por $s_p(t)$, sendo $p \in P$ e $t \in T$.

P4 *m é uma função cujo domínio é P e codomínio é $\mathbb{R}$.*

As imagens de m são denotadas por $m(p)$, sendo $p \in P$.

P5 *f é uma função cujo domínio é $P \times P \times T$ e cujo codomínio é $\mathbb{R}^3$.*

As imagens de f são denotadas por $f(p, q, t)$, sendo $p \in P$, $q \in P$ e $t \in T$.

P6 *g é uma função cujo domínio é $P \times T$ e cujo codomínio é $\mathbb{R}^3$.*

As imagens de g são denotadas por $g(p, t)$, sendo $p \in P$ e $t \in T$.

P7 *Se $p \in P$ e $t \in T$, $s_p(t)$ é duas vezes diferenciável, ou seja,*

$$\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2}$$

existe em todo $t \in T$.

P8 *Se $p \in P$, $m(p)$ é um número real estritamente positivo.*

Ou seja, massa é sempre estritamente positiva ($m(p) > 0$).

P9 *Se $p \in P$, $q \in P$ e $t \in T$, $f(p, q, t) = -f(q, p, t)$.*

Ou seja, a cada ação corresponde uma reação, no mesmo instante, na mesma direção, em sentido oposto e com a mesma intensidade.

P10 *Se $p \in P$, $q \in P$ e $t \in T$,*

$$[s_p(t), f(p, q, t)] = -[s_q(t), f(q, p, t)],$$

sendo que os colchetes $[,]$ *denotam produto vetorial usual em* $\mathbb{R}^3$. *Ou seja, a força de reação a uma dada ação está na mesma direção da reta definida pelas posições das duas partículas envolvidas.*

P11 *Se* $p \in P$ *e* $t \in T$,

$$m(p)\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = \sum_{q \in P} f(p,q,t) + g(p,t). \tag{3.1}$$

Ou seja, a força resultante sobre uma dada partícula corresponde à massa da mesma vezes sua aceleração.

Com esses axiomas é possível, por exemplo, provar as leis de Kepler que regem os movimentos planetários, se acrescentarmos a lei da gravitação universal de Newton como novo axioma para uma teoria de gravitação. Outros desdobramentos de tais axiomas são a exploração de alternativas lógicas nos moldes das idéias de Hilbert, conforme discutido na Introdução desta dissertação. Exemplos de alternativas lógicas são a mecânica de Hertz (uma mecânica que abre mão da noção de força) e a mecânica de Mach (que fornece uma visão física para a inércia dos corpos com massa). Detalhes sobre essas duas mecânicas podem ser vistos em [20].

3.1 Independência de Conceitos Primitivos

Apresentamos nesta Seção alguns resultados e suas respectivas demonstrações fazendo uso do princípio de Padoa.

Teorema 3.1 *"Massa" é um conceito independente dos demais conceitos de MSS.*

Demonstração: Usando o princípio de Padoa, devemos mostrar duas interpretações nas quais os conceitos de posição, força interna, força externa, conjunto de partículas e intervalo de tempo permanecem constantes enquanto o conceito de massa tem interpretações diferentes. Assim, vamos considerar a seguinte interpretação I_1:

1. O conjunto P é formado por quatro partículas que, para simplificar, vamos representar por partículas 1, 2, 3 e 4.
2. O intervalo de tempo é toda a reta dos números reais.
3. As posições das partículas 1, 2, 3 e 4 são consideradas constantes, representadas pelos vetores $(c_1, 0, 0)$, $(c_2, 0, 0)$, $(c_3, 0, 0)$ e $(c_4, 0, 0)$, respectivamente.
4. A força interna que qualquer partícula exerce sobre outra é nula.
5. A força externa sobre qualquer partícula é nula para qualquer instante t.
6. A massa de cada partícula é unitária, ou seja, $m(1) = m(2) = m(3) = m(4) = 1$.

É fácil verificar que essa interpretação satisfaz todos os axiomas de MSS. De fato:

P1 P é um conjunto finito não vazio.

P2 T é um intervalo de números reais.

P3 s é uma função com domínio $P \times T$ e codomínio $\mathbb{R}^3$.

P4 m é uma função com domínio P e codomínio $\mathbb{R}$.

P5 f é uma função com domínio $P \times P \times T$ e codomínio $\mathbb{R}^3$.

P6 g é uma função com domínio $P \times T$ e codomínio $\mathbb{R}^3$.

P7 Como as posições das partículas são constantes, as acelerações são nulas. Portanto, s é duas vezes diferenciável.

P8 Como a massa de cada partícula é unitária, temos que a massa é sempre positiva.

P9 Como a força que qualquer partícula exerce sobre outra é nula, isto é, $f(p,q,t) = 0$, temos que $f(p,q,t) = -f(q,p,t)$.

P10 Da mesma forma verificamos que o produto externo é nulo, e portanto $[s_p(t), f(p,q,t)] = -[s_q(t), f(q,p,t)]$.

P11 Basta observar que todas as forças envolvidas são nulas e que a aceleração também e, portanto, a equação se verifica.

Agora, consideremos a seguinte interpretação I_2:

Os conceitos P, T, s, f e g permanecem com as mesmas interpretações de I_1, enquanto que o conceito de massa tem a seguinte interpretação:

Cada partícula tem massa igual a 2.

É fácil verificar que essa interpretação satisfaz os axiomas **P1**, **P2**, **P3**, **P4**, **P5**, **P6**, **P7**, **P8** de MSS. A verificação dos axiomas **P9**, **P10** e **P11** deve ser feita cuidadosamente, mas de fato eles são satisfeitos.

Portanto, pelo princípio de Padoa, o conceito de massa é independente dos demais conceitos de MSS, logo é não eliminável. □

Teorema 3.2 *Força interna é um conceito independente das demais noções primitivas de MSS.*

Demonstração: Fazemos aqui apenas um esboço da demonstração, pois a mesma é um tanto extensa. Usando o princípio de Padoa, devemos mostrar dois modelos nos quais os conceitos de massa, posição, força externa, conjunto de partículas e intervalo de tempo permanecem com a mesma interpretação enquanto o conceito de força interna admite interpretações diferentes. Assim, vamos considerar o seguinte modelo M_1:

1. O conjunto P é formado por quatro partículas que, para simplificar, vamos representar por partículas 1, 2, 3 e 4.
2. O intervalo de tempo é toda a reta dos números reais.
3. As posições das partículas 1, 2, 3 e 4 são consideradas constantes, representadas pelos vetores $(c_1, 0, 0)$, $(c_2, 0, 0)$, $(c_3, 0, 0)$ e $(c_4, 0, 0)$, respectivamente.
4. A massa de cada partícula é unitária, ou seja, $m(1) = m(2) = m(3) = m(4) = 1$.
5. A força externa sobre qualquer partícula é nula para qualquer instante t.
6. A força interna que qualquer partícula exerce sobre outra é nula.

É fácil verificar que essa interpretação satisfaz todos os axiomas de MSS. De fato:

P1 P é um conjunto finito não vazio.

P2 T é um intervalo de números reais.

P3 s é uma função com domínio $P \times T$ e codomínio $\mathbb{R}^3$.

P4 m é uma função com domínio P e codomínio $\mathbb{R}$.

P5 f é uma função com domínio $P \times P \times T$ e codomínio $\mathbb{R}^3$.

P6 g é uma função com domínio $P \times T$ e codomínio $\mathbb{R}^3$.

P7 Como as posições das partículas são constantes, as acelerações são nulas. Portanto, s é duas vezes diferenciável.

P8 Como a massa de cada partícula é unitária, temos que a massa é sempre positiva.

P9 Como a força que qualquer partícula exerce sobre outra é nula, isto é, $f(p,q,t) = 0$, temos que $f(p,q,t) = -f(q,p,t)$.

P10 Também verificamos que o produto externo é nulo, e portanto $[s_p(t), f(p,q,t)] = -[s_q(t), f(q,p,t)]$.

P11 Basta observar que todas as forças envolvidas são nulas e que a aceleração também é. Portanto, a equação 3.1 se verifica.

Agora, consideremos o seguinte modelo M_2:

Os conceitos P, T, s, m e g permanecem com as mesmas interpretações de M_1, enquanto que o conceito de força interna tem a seguinte interpretação:

$$f(2,1,t) = f(4,2,t) = f(1,3,t) = f(3,4,t) = (1,0,0),$$

$$f(3,1,t) = f(1,2,t) = f(4,3,t) = f(2,4,t) = (-1,0,0),$$

$$f(4,1,t) = f(3,2,t) = f(2,3,t) = f(1,4,t) = (0,0,0),$$

para todo t.

É fácil verificar que essa interpretação satisfaz os axiomas **P1**, **P2**, **P3**, **P4**, **P5**, **P6**, **P7**, **P8** de MSS. A verificação dos axiomas **P9**, **P10** e **P11** deve ser feita cuidadosamente, mas de fato eles são satisfeitos.

Portanto, pelo princípio de Padoa, o conceito de força interna é independente dos demais conceitos de MSS, logo é não eliminável. □

Teorema 3.3 *Posição é um conceito independente dos demais conceitos de MSS.*

Demonstração: Análoga às demonstrações anteriores.

Teorema 3.4 *Força externa é um conceito* definível *a partir dos demais conceitos de MSS.*

Demonstração: Para provar este teorema, vamos usar o axioma **P11** de MSS que é como se segue: **P11** Se $p \in P$ e $t \in T$,

$$m(p)\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = \sum_{q \in P} f(p,q,t) + g(p,t),$$

ou seja,a força resultante sobre uma dada partícula corresponde à massa da mesma vezes sua aceleração.

Vemos, então, que podemos isolar $g(p,t)$, pois temos apenas uma força perturbativa atuando sobre as partículas. Diferente de força interna onde temos várias forças atuando sobre cada uma das partículas.

Assim, podemos definir força externa (ou força perturbativa) como sendo:

$$g(p,t) = m(p)\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} - \sum_{q \in P} f(p,q,t)$$

E portanto, o teorema está provado.□

Agora vamos provar que os conceitos P e T são elimináveis.

Teorema 3.5 *O conjunto P de partículas é um conceito* definível *a partir dos demais conceitos de MSS.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que P não seja definível em MSS. Assim, devemos mostrar que existem dois modelos M_1 e M_2 tais que as interpretações para T, s, m, f e g são as mesmas nos dois modelos, enquanto P tem interpretações diferentes em M_1 e M_2. Como P é domínio de s, m, f e g, necessariamente as interpretações destes irão mudar também. Logo, chegamos a um absurdo e, portanto, P é definível em MSS.□

Teorema 3.6 *Tempo é um conceito definível a partir dos demais conceitos de MSS.*

Demonstração: Análoga à demonstração anterior.

Agora que provamos que os conceitos P e T são elimináveis, resta-nos uma pergunta: como então ficaria a reformulação de MSS sem esses conceitos?

3.2 O Sistema MSS-ZF Sem Tempo Como Conceito Primitivo

Nesta Seção apresentamos uma formulação do sistema MSS, sem o conceito de tempo, no escopo da teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Chamamos tal formulação de MSS-ZF.

Primeiramente, considere a seguinte definição:

Definição 3.2 *Se uma função f tem domínio $D_1 \times ... \times D_n$, dizemos que D_i é uma componente de f, especificamente chamada de i-ésima componente de f.*

Definição 3.3 $\mathbb{P} = \langle P, s, m, f, g \rangle$ *é um sistema MSS-ZF sem tempo se os seguintes axiomas forem satisfeitos:*

P1 *P é um conjunto finito não vazio.*

P2 *s é uma função com duas componentes, com codomínio $\mathbb{R}^3$ e cuja primeira componente é P.*

P3 *m é uma função cujo codomínio é $\mathbb{R}^+$.*
As imagens de m são denotadas por $m(p)$.

P4 *f é uma função com três componentes, com codomínio $\mathbb{R}^3$ e cuja primeira e segunda componentes são P.*

P5 *g é uma função com duas componentes, com codomínio $\mathbb{R}^3$ e cuja primeira componente é P.*

P6 *$s_p(t)$ é duas vezes diferenciável com relação aos elementos da última componente, ou seja,*

$$\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2}$$

existe.

P7 *A segunda componente de s e g e a terceira componente de f são iguais.*

P8 *Para cada p, q pertencentes a P e para cada elemento da terceira componente de f, $f(p,q,t) = -f(q,p,t)$.*
Ou seja, a cada ação corresponde uma reação, no mesmo instante, na mesma direção, em sentido oposto e com mesma intensidade.

P9 *Para cada p e q em P e cada elemento da terceira componente de f,*

$$[s_p(t), f(p,q,t)] = -[s_q(t), f(q,p,t)].$$

Os colchetes $[\ ,\ ]$ denotam produto vetorial usual em $\mathbb{R}^3$. Ou seja, a força de reação a uma dada ação está na mesma direção da reta definida pelas posições das duas partículas envolvidas.

P10 *Para cada p de P e cada elemento da terceira componente de f,*

$$m(p)\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = \sum_{q \in P} f(p,q,t) + g(p,t).$$

Ou seja,a força resultante sobre uma dada partícula corresponde à massa da mesma vezes a sua aceleração.

Assim, definimos tempo T como se segue:

Definição 3.4 *T é a última componente das funções s, f e g, as quais são coincidentes.*

Deve se notar que essa reformulação de MSS sem tempo é didaticamente desinteressante, pois torna a leitura dos axiomas mais complicada, graças ao termo novo empregado que chamamos de "componente i-ésima da função".

3.3 Uma Formulação para MSS Onde Tempo é Indispensável

Como vimos na Seção 3.1, o conceito T é dependente dos demais conceitos primitivos. Assim, na Seção 3.2, foi apresentada uma formulação para MSS onde T não é explicitamente mencionado.

Nesta Seção, exibimos um sistema inspirado em MSS no qual tempo é indispensável.

Definição 3.5 $\mathbb{P} = \langle P, T, R', s, m, f, g \rangle$ *é um sistema MSS com independência de T se os seguintes axiomas forem satisfeitos:*

P1 *P é um conjunto finito não vazio.*

P2 *T é um intervalo de números reais.*

P3 *R' também é um intervalo de números reais e contido em T.*

P4 *s é uma função com domínio $P \times R'$ e codomínio $\mathbb{R}^3$.*
As imagens são denotadas por $s_p(t)$, sendo $p \in P$ e $t \in R'$.

P5 *m é uma função cujo domínio é P e codomínio é $\mathbb{R}^+$.*
As imagens de m são denotadas por $m(p)$, sendo $p \in P$.

P6 *f é uma função cujo domínio é $P \times P \times R'$ e codomínio é $\mathbb{R}^3$.*
As imagens de f são denotadas por $f(p, q, t)$, sendo $p \in P$, $q \in P$ e $t \in R'$.

P7 *g é uma função cujo domínio é $P \times R'$ e codomínio é $\mathbb{R}^3$. As imagens de g são denotadas por $g(p,t)$, sendo $p \in P$ e $t \in R'$.*

P8 *Se $p \in P$ e $t \in R'$, s é duas vezes diferenciável, ou seja,*

$$\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2}$$

existe.

P9 *Se $p \in P$, $q \in P$ e $t \in R'$, $f(p,q,t) = -f(q,p,t)$.*

P10 *Se $p \in P$, $q \in P$ e $t \in R'$,*

$$[s_p(t), f(p,q,t)] = -[s_q(t), f(q,p,t)].$$

Os colchetes $[\ ,\ ]$ denotam produto vetorial usual em $\mathbb{R}^3$.

P11 *Se $p \in P$ e $t \in R'$,*

$$m(p)\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = \sum_{q \in P} f(p,q,t) + g(p,t).$$

Para provar que, de acordo com essa definição, T é independente dos demais conceitos primitivos, vamos considerar dois modelos M_1 e M_2 como descritos abaixo:

M_1:

- O conjunto P é formado por duas partículas, representadas por 1 e 2.
- A força interna que qualquer partícula exerce sobre outra é nula.
- A força externa sobre qualquer partícula é nula para qualquer instante t.
- A massa de cada partícula é unitária.

- A posição de cada partícula é constante.

- Considere $T = (0, 1)$ com $0,\ 1 \in \mathbb{R}$ e $R' = (0, 1)$.

M_2:

- P, R', f, g, m e s têm a mesma interpretação dada em M_1.

- Agora, considere $T = (-1, 2)$ com $-1,\ 2 \in \mathbb{R}$.

De fato, esses dois modelos satisfazem os axiomas da definição 3.5 e, portanto, pelo Princípio de Padoa podemos concluir que T é independente dos demais conceitos primitivos.

Há uma intuição interessante aqui. O tempo T introduzido na forma de um tempo "global" como se faz originalmente em MSS é dispensável se o mesmo é entendido como domínio de funções que descrevem grandezas físicas tais como posição e forças. No entanto, se pensarmos em tempo como um intervalo local R' em T, o tempo global para a ser indispensável se apenas intervalos locais (propriamente contidos no tempo global T) são empregados como domínio de grandezas físicas. Ou seja, o tempo passa a ser naturalmente indispensável se apenas intervalos "menores" de tempo são levados em conta. Isso se identifica muito com a prática, uma vez que em laboratório jamais se realizam experiências ao longo do maior intervalo de tempo possível. Tudo se passa dentro de intervalos de tempo bastante delimitados e, em seguida, por força de simetria, o físico generaliza seus resultados para intervalos de tempo quaisquer.

3.4 O Sistema MSS-ZF Sem Conjunto de Partículas Como Conceito Primitivo

Nesta Seção apresentamos uma reformulação do sistema MSS, sem o conceito de partícula, usando como fundamentação a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

Definição 3.6 $\mathbb{P} = \langle T, s, m, f, g \rangle$ *é um sistema MSS sem partículas se os seguintes axiomas forem satisfeitos:*

P1 T *é um intervalo de números reais.*

P2 s *é uma função com duas componentes, com codomínio* $\mathbb{R}^3$*. A segunda componente é* T*.*

P3 m *é uma função com uma componente, cujo codomínio é* $\mathbb{R}^+$*.*

P4 f *é uma função com três componentes, com codomínio* $\mathbb{R}^3$*. A terceira componente é* T*.*

P5 g *é uma função com duas componentes, com codomínio* $\mathbb{R}^3$*. A segunda componente é* T*.*

P6 *Se* $t \in T$*, existe* $\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2}$*.*

P7 *O domínio de* m*, a primeira componente de* g*, a primeira componente de* s *e a primeira e segunda componentes de* f *são iguais.*

P8 *Se* p *pertence à primeira componente de* f*,* q *pertence à segunda componente de* f *e* $t \in T$ *então* $f(p,q,t) = -f(q,p,t)$*.*

P9 *Se* p *pertence à primeira componente de* f*,* q *pertence à segunda componente de* f *e* $t \in T$ *então*

$$[s_p(t), f(p,q,t)] = -[s_q(t), f(q,p,t)],$$

sendo que os colchetes $[\ ,\ ]$ *denotam produto vetorial usual em* $\mathbb{R}^3$.

P10 *Se* p *pertence à primeira componente de* f *e* $t \in T$, *então* $m(p)\dfrac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = \sum f(p,q,t) + g(p,t)$, *com* q *pertencendo à segunda componente*

Assim, definimos o conjunto P de partículas como se segue:

Definição 3.7 *P é o domínio de m, a primeira componente de g, a primeira componente de s e a primeira e segunda componentes de f.*

Aqui também deve se perceber a falta de "elegância" que ocorre nessa reformulção para a mecânica newtoniana, sem conjunto de partículas como noção explicitada no elenco de conceitos primitivos. Nossa esperança é que ao se mudar a teoria de conjuntos subjacente, de Zermelo-Fraenkel para nosso sistema inspirado nas idéias de von Neumann, a notação ficará claramente mais simples, uma vez que em nossa teoria de conjuntos as funções não têm domínio. Isso evitará a necessidade de se falar em componentes de funções como se faz acima.

3.5 Uma Formulação para MSS Onde o Conjunto P de Partículas é Indispensável

Como vimos na Seção 3.1, o conceito P é dependente dos demais conceitos primitivos. Assim, na Seção 3.4, foi apresentada uma formulação para MSS onde P não estava presente.

Nesta Seção, reescrevemos MSS de forma a obter a não eliminabilidade do conceito P.

Definição 3.8 $\mathbb{P} = \langle P, Q, T, s, m, f, g \rangle$ *é um sistema MSS com independência de* P *se os seguintes axiomas forem satisfeitos:*

P1 Q *é um conjunto não vazio.*

P2 Q *é um conjunto não vazio, finito e contido em* P.

P3 T *é um intervalo de números reais.*

P4 *Se* $p \in Q$ *e* $t \in T$, *então* $s_p(t) \in \mathbb{R}^3$ *e*

$$\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2}$$

existe.

P5 *Se* $p \in Q$, *então* $m(p) > 0$.

P6 *Se* $p \in Q$, $q \in Q$ *e* $t \in T$, *então f(p,q,t)=-f(q,p,t).*

P7 *Se* $p \in Q$, $q \in Q$ *e* $t \in T$, *então*

$$[s_p(t), f(p,q,t)] = -[s_q(t), f(q,p,t)],$$

sendo que os colchetes [,] *denotam produto vetorial usual em* $\mathbb{R}^3$.

P8 *Se* $p \in Q$, $q \in Q$ *e* $t \in T$, *então*

$$m(p)\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = \sum_{q \in P} f(p,q,t) + g(p,t).$$

Para provar que, de acordo com esta definição, P é independente dos demais conceitos primitivos, vamos considerar duas interpretações I_1 e I_2 como descritas abaixo:

I_1:

- Considere $T = \mathbb{R}$.

- A força interna que qualquer partícula exerce sobre outra é nula.

- A força externa sobre qualquer partícula é nula para qualquer instante t.
- A massa de cada partícula é unitária.
- A posição de cada partícula é constante.
- Considere o conjunto Q formado por duas partículas, representadas por 1 e 2.
- Seja $P = \{1, 2, 3\}$.

I_2:

- T, Q, f, g, m e s têm a mesma interpretação dada em I_1.
- Agora, seja $P = \{1, 2, 4\}$.

De fato, essas duas interpretações satisfazem os axiomas da definição 3.8 e, portanto, pelo Princípio de Padoa podemos concluir que P é independente dos demais conceitos primitivos.

3.6 Outras Aplicações

Nesta Seção, consideramos algumas teorias matemáticas, nas quais podemos eliminar certos conceitos primitivos usualmente presentes nas mesmas.

Primeiramente, tratamos de espaço vetorial sem vetores.

3.6.1 Espaço Vetorial

A noção usual de espaço vetorial é a seguinte:

Definição 3.9 *$V = \langle V, K, +, \cdot \rangle$ é um espaço vetorial se, e somente se, os axiomas abaixo são satisfeitos:*

V1 *V é um conjunto não vazio, cujos elementos são chamados de vetores.*

V2 *K é um corpo munido das operações de adição $+_K$ e multiplicação $\cdot_K$. Os elementos de K são chamados de escalares.*

V3 *$+ : V \times V \to V$, ou seja, a adição de vetores é uma função que se aplica a pares ordenados de vetores e resulta em um vetor.*

V4 *$\cdot : K \times V \to V$, ou seja, $\cdot$ é uma multiplicação entre escalar e vetor e que resulta em vetor.*

V5 *Comutatividade: se u e v são vetores, então $u + v = v + u$.*

V6 *Associatividade: se u, v e w são vetores, então $(u + v) + w = u + (v + w)$.*

V7 *Se α e β são escalares e u é um vetor, então $(\alpha \cdot_K \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$.*

V8 *Existência de um vetor nulo: existe um vetor v tal que para todo vetor u tem-se $u + v = u$. Esse vetor v é denotado por 0.*

V9 *Existência de um vetor simétrico: Para todo vetor u existe um vetor w tal que $u + w = 0$. O vetor simétrico w de u é denotado por $-u$ e a adição $v + (-u)$, para um vetor v qualquer, pode ser denotada abreviadamente por $v - u$.*

V10 *Se u é vetor e α e β são escalares, então $(\alpha +_K \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.*

V11 *Se u e v são vetores e α é escalar, então $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$.*

V12 *Se 1 denota o elemento neutro de K em relação a $\cdot_K$ e u é* *um vetor, então* $1 \cdot u = u$.

Segue-se então o seguinte resultado:

Teorema 3.7 *O conjunto* V *de vetores é definível a partir dos conceitos primitivos de espaço vetorial.*

Demonstração: Suponha que V não seja definível (isto é, ele é não eliminável) a partir dos demais conceitos primitivos de espaço vetorial. Assim, devemos mostrar que existem dois modelos M_1 e M_2 tais que as interpretações para os demais conceitos permanecem as mesmas, enquanto V tem interpretações diferentes em M_1 e M_2. Como V é domínio de $+$ e de $\cdot$, necessariamente as interpretações desses irão mudar também. Logo, é impossível mudar V sem alterar as funções $+$ e $\cdot$. Portanto, chegamos a um absurdo. Concluímos então que V é eliminável de acordo com o princípio de Padoa.

De acordo com esse teorema, V é eliminável, ou seja, é definível a partir dos demais conceitos primitivos de espaço vetorial. E novamente fazemos a seguinte pergunta: como definimos espaço vetorial sem mencionar explicitamente o conjunto V de vetores? Neste momento, vamos apresentar a formulação usando a teoria de Zermelo-Fraenkel.

Antes teremos que apresentar algumas definições auxiliares:

Definição 3.10 *Seja* $f : A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \rightarrow C$ *uma função. Diz-se que o conjunto* A_i *é a i-ésima componente ou i-ésima projeção de* f (D_f).

Definição 3.11 *Seja* $f : A \times A \to C$. *Diz-se que* f *é comutativa se, e somente se, para todo par ordenado* (u, v) *de* $A \times A$ *tem-se* $f(u, v) = f(v, u)$.

Definição 3.12 *Sejam* $f : A \times B \to B$ *e* $g : A \times A \to A$ *duas funções. Diz-se que* f *é associativa em relação a* g *se, e somente se, para quaisquer* $(a, b) \in A \times A$ *e* $v \in B$ *tem-se* $f(g(a, b), v) = f(a, f(b, v))$.

Definição 3.13 *Sejam* $f : A \times B \to B$, $g : A \times A \to A$ *e* $h : B \times B \to B$. *Diz-se que* f *é distributiva à direita em relação a* g *e perante* h *se, e somente se, para todo* $(a, b) \in A \times A$ *e para todo* $u \in B$ *tem-se* $f(g(a, b), u) = h(f(a, u), f(b, u))$.

Definição 3.14 *Sejam* $f : B \times A \to B$, $g : A \times A \to A$ *e* $h : B \times B \to B$. *Diz-se que* f *é distributiva à esquerda em relação a* g *e perante* h *se, e somente se, para todo* $(a, b) \in A \times A$ *e para todo* $u \in B$ *tem-se* $f(u, g(a, b)) = h(f(u, a), f(u, b))$.

Definição 3.15 *Seja* $f : A \times B \to B$. *Diz-se que* f *admite neutro na primeira projeção se, e somente se, existe* $a \in A$ *tal que para todo* $u \in B$, $f(a, u) = u$.

Definição 3.16 *Seja* $f : A \times B \to A$. *Diz-se que* f *admite neutro na segunda projeção se, e somente se, existe* $a \in B$ *tal que para todo* $u \in A$, $f(u, a) = u$.

Definição 3.17 *Seja* $f : A \times B \to A$. *Quando* $A = B$, *e existe* $a \in A$ *tal que para todo* $u \in A$ *tem-se* $f(a, u) = f(u, a) = u$ *diz-se que* a *é neutro de* f.

Definição 3.18 *Seja* $f : A \times A \to A$. *Diz-se que* f *admite simétrico à direita se, e somente se, para todo* $u \in A$ *existe* $v \in A$ *tal que* , $f(u, v) = a$, *onde* a *é o neutro de* f.

Definição 3.19 *Seja* $f : A \times A \to A$. *Diz-se que* f *admite simétrico à esquerda se, e somente se, para todo* $v \in A$ *existe* $u \in A$ *tal que* , $f(u, v) = a$, *onde* a *é o neutro de* f.

Definição 3.20 *Seja* $f : A \times A \to A$. *Diz-se que* f *admite simétrico se, e somente se, para todo* $u \in A$ *existe* $v \in A$ *tal que,* $f(u, v) = f(v, u) = a$, *onde* a *é o neutro de* f.

Formulação em ZF de Espaço Vetorial Sem o Conjunto de Vetores

Com as definições vistas na seção anterior podemos então definir espaço vetorial sem mencionar explicitamente o conjunto V de vetores.

Definição 3.21 $V = \langle K, +, \cdot \rangle$ *é um espaço vetorial se, e somente se, os axiomas abaixo são satisfeitos:*

V1 K *É um corpo munido das operações de adição* $+_K$ *e multiplicação* $\cdot_K$.

V2 $+$ *é uma função cujo domínio* (D_+) *é formado por duas projeções iguais e cujo codomínio* (Cd_+) *coincide com a primeira (ou segunda) projeção de* $+$.

V3 $\cdot$ *é uma função cujo domínio* $(D_\cdot)$ *é formado por duas projeções, sendo que a primeira é* K *e a segunda coincide com seu codomínio* $(Cd_\cdot)$.

V4 *O codomínio de* $+$ *coincide com o codomínio de* $\cdot$ $((Cd_+) = (Cd_\cdot))$.

V5 $+$ *é comutativa.*

V6 $+$ *é associativa.*

V7 $+$ *admite neutro.*

V8 $+$ *admite simétrico.*

V9 $\cdot$ *é associativa em relação a* $\cdot_K$.

V10 $\cdot$ *é distributiva à direita em relação* $+_K$ *e perante* $+$.

V11 $\cdot$ *é distributiva em relação à* $+$.

V12 $\cdot$ *admite neutro em relação à primeira projeção.*

3.6.2 Grupo

Apresentamos primeiramente a definição usual de grupos.

Definição 3.22 *Um grupo* $\mathcal{G}$ *é uma tripla ordenada* $\langle G, *, e\rangle$ *que satisfaz os seguintes axiomas:*

GC1 *G é um conjunto não vazio cujos elementos são chamados de elementos do grupo.*

GC2 $*$ *é uma função com domínio* $G \times G$ *e codomínio* G*. Os pares ordenados pertencentes à função* $*$ *são denotados por* $((x, y), x * y)$*. O elemento* $x * y$ *de* G *é a imagem do par ordenado* (x, y) *pertencente a* $G \times G$.

GC3 e *é um elemento de* G.

GC4 *Se* x, y *e* z *são elementos de* G, *então* $x * (y * z) = (x * y) * z$.

GC5 *Se* $x \in G$, *então* $x * e = x$.

GC6 *Se $x \in G$, então existe $y \in G$ tal que $y * x = e = x * y$.*

De acordo com o princípio de Padoa, podemos obter o seguinte resultado:

Teorema 3.8 *G é definível a partir dos demais conceitos de grupo.*

Demonstração: A demonstração é análoga às anteriores, nas quais queremos mostrar que um certo conceito é definível a partir dos demais.

Veremos agora como é a definição de grupo sem o conjunto G, na teoria de Zermelo-Fraenkel.

Formulação em ZF de Grupo Sem o Conjunto G

Precisamos das seguintes definções para podermos definir o conjunto G e reescrever a definição de grupo sem fazer menção explícita ao conjunto G.

Definição 3.23 *Seja $f : A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \to C$ uma função. Diz-se que o conjunto A_i é a i-ésima componente ou projeção do domínio de f (D_f).*

Definição 3.24 *Seja $f : A \times A \to A$. Diz-se que f é associativa se, e somente se, para quaisquer $(a, b) \in A \times A$ e $v \in A$ tem-se $f(f(a, b), v) = f(a, f(b, v))$.*

Definição 3.25 *Seja $f : A \times A \to A$. Diz-se que f admite neutro se, e somente se, existe $a \in A$ tal que para todo $u \in A$ tem-se $f(a, u) = f(u, a) = u$, onde a é neutro de f.*

Definição 3.26 *Seja $f : A \times A \rightarrow A$. Diz-se que f admite simétrico se, e somente se, para todo $u \in A$ existe $v \in A$ tal que $f(u, v) = f(v, u) = a$, onde a é neutro de f.*

Definição 3.27 $G = \langle *, e \rangle$ *é um grupo se, e somente se, satisfaz os seguintes axiomas:*

GC1 $*$ *é uma função cujo domínio é formado por duas componentes iguais e cujo codomínio coincide com a primeira (ou segunda) componente de* $*$.

GC2 $*$ *é associativa.*

GC3 $*$ *admite neutro.*

GC4 $*$ *admite simétrico.*

Podemos definir o conjunto G da seguinte forma:

Definição 3.28 G *é a primeira componente de uma função* $*$ *dada, que, por seu turno, é um dos conceitos primitivos de grupo.*

3.6.3 Exemplo Elementar

Nesta Seção, apresentamos um exemplo onde o princípio de Padoa se aplica e didaticamente trata-se de um bom exemplo para ilustrar aplicações análogas como as que já vimos até então.

Considere uma teoria (que chamamos de minimalista [21]) com apenas dois conceitos primitivos: X e f, onde X é um conjunto e f é uma função com domínio X e codomínio $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais.

Definição 3.29 *Um* espaço minimalista *é um par ordenado* $EM = \langle X, f\rangle$ *que satisfaz os seguintes axiomas:*

EM1 X *é um conjunto.*

EM2 $f : X \to \mathbb{R}$*, ou seja,* f *é uma função real com domínio* X*.*

Pode-se mostrar os seguintes resultados:

Teorema 3.9 *Em um espaço minimalista* $\langle X, f\rangle$*,* f *é um conceito independente de* X*.*

Demonstração: Para usarmos o princípio de Padoa, vamos exibir dois modelos para EM nos quais X tem a mesma interpretação, mas f admite diferentes interpretações. Seja M_1 a interpretação na qual X é o conjunto dos números reais e f é a função identidade $f(x) = x$, enquanto em M_2, f é a função constante $f(x) = 3$ e X tem a mesma interpretação. Pode-se verificar facilmente que M_1 e M_2 são modelos de EM, pois são interpretações que satisfazem os axiomas de EM e, portanto, pelo princípio de Padoa f é independente de X. $\square$

Teorema 3.10 *Em um espaço minimalista* $\langle X, f\rangle$*,* X *é um conceito definível.*

Demonstração: Para provar que X é um conceito definível a partir de f, vamos supor que X é independente. Assim, deveria ser possível exibir dois modelos M_1 e M_2 para EM nos quais f tem a mesma interpretação, mas X admite diferentes interpretações. Como X é domínio de f, se mudarmos a interpretação de X, necessariamente mudamos a interpretação de f, o que é um absurdo. Portanto, X é dependente, isto é, definível. $\square$

Dessa forma, podemos definir X da seguinte forma:

Definição 3.30 *Em um espaço minimalista $\langle X, f \rangle$, é possível definir X por meio da seguinte igualdade:*

$$X =_{def} Dom f,$$

sendo que $Dom f$ denota o domínio da função real f.

E, de acordo com estes resultados, podemos definir um espaço minimalista sem mencionar X da seguinte forma:

Definição 3.31 *Um espaço minimalista é um conjunto f que satisfaz o seguinte axioma:*

NEM1 *f é uma função cujo codomínio é $\mathbb{R}$.*

Esta Seção é de fundamental importância para os propósitos deste trabalho, pois com estes resultados vemos que com freqüência, o que é imprescindível mesmo são funções e não conjuntos, pelo menos em teorias matemáticas fundamentadas em Zermelo-Fraenkel e que fazem uso de funções, como conceitos primitivos, cujos domínios são conjuntos que também estão na lista de conceitos primitivos. Tais casos, como já vimos, ocorrem no sistema MSS, bem como em certas teorias matemáticas tais como a teoria dos espaços vetoriais e a teoria de grupos, entre outros possíveis exemplos. Isso sugere que as formulações usuais de certas teorias como predicados conjuntistas em Zermelo-Fraenkel [23] estão carregadas com certas "gorduras" elimináveis. O que queremos é uma descrição mais enxuta para teorias formais, com especial ênfase para teorias da física. É claro que, pelo menos a princípio, isso não deve implicar na descoberta de novas idéias em física, matemática ou lógica. Mas o que aqui oferecemos é a análise de uma perspectiva diferente para uma descrição alternativa de teorias da física.

Capítulo 4

A Teoria de Conjuntos $\mathcal{N}$

Neste Capítulo desenvolvemos uma teoria fortemente baseada na teoria de conjuntos de von Neumann [26], na qual assume-se como noção intuitiva o conceito de função e define-se o conceito de conjunto. Tal teoria é denotada por $\mathcal{N}$.

4.1 Axiomas de $\mathcal{N}$

Nesta Seção, referimo-nos com freqüência ao artigo original de von Neumann, no qual os termos são intuitivamente interpretados como funções ou argumentos. Para simplificar, sempre que nos referimos à teoria de von Neumann (aqui abreviada por VN), queremos dizer a teoria original do artigo [26].

A teoria de conjuntos $\mathcal{N}$ aqui desenvolvida, é uma teoria de primeira ordem com igualdade [17] [20]. Outro aspecto importante é que essa teoria é desenvolvida de tal forma que a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel seja derivada naturalmente em $\mathcal{N}$, como já anunciamos no Capítulo 1.

Os símbolos de $\mathcal{N}$ são:

- duas constantes individuais: $\bar{0}$ e $\bar{1}$;

Na teoria VN, essas constantes são denotadas por A e B. Aqui, denotamos como constantes $\bar{0}$ e $\bar{1}$, pelo fato de que há uma estreita relação com a noção de função característica $f : U \longrightarrow \{0, 1\}$, na qual um elemento x pertence ao conjunto X (onde X é um subconjunto de U) se a imagem $f(x)$ é igual a 1 (um) e não pertence a X se a imagem $f(x)$ é igual a 0 (zero).

- duas letras funcionais binárias denotadas por $[,]$ e $(,)$;

O termo $[a, x]$ corresponde intuitivamente à imagem de um elemento x pela função a. Também podemos nos referir à "imagem de um elemento x pela função a" simplesmente por "a mapeia x". O termo (x, y) corresponde, intuitivamente falando, a um par ordenado.

Lembrando que essa teoria é de primeira ordem com igualdade, temos ainda os seguintes símbolos:

- quantificador universal: $\forall$

- variáveis individuais denotadas por a,b,c,r,s,t,x,y,w,z;

- conectivos lógicos: $\neg$ e $\Rightarrow$;

- símbolo lógico: $=$.

- símbolos auxiliares: ,, (e).

Usamos parênteses para pares ordenados e também em fórmulas. Mas isso não deve gerar confusão. Lembramos que os conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$ e $\Leftrightarrow$ são definidos a partir dos conectivos lógicos mencionados acima de maneira análoga à que se faz no cálculo de predicados. Também podemos definir o quantificador existencial a partir do quantificador universal da maneira usual.

Em ZF, todos os termos são chamados de conjuntos. Aqui, em $\mathcal{N}$, todos os termos são chamados de funções.

Os axiomas de $\mathcal{N}$ são como se seguem:

Axioma 1: As constantes $\bar{0}$ e $\bar{1}$ são funções distintas. Ou, em símbolos,

$$\neg(\bar{0} = \bar{1})$$

A pertinência $\in$ é definida da seguinte forma:

Definição 4.1 *Uma função x pertence a uma função a se, e somente se, a imagem de x por a é $\bar{1}$. Em símbolos, temos*

$$x \in a \Leftrightarrow [a, x] = \bar{1}$$

Dizemos que $x \notin a$ se, e somente se, $[a, x] \neq \bar{1}$.

Essa ocorre uma diferença importante em relação à teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF). Aqui, definimos a pertinência, enquanto nas formulações usuais de ZF assume-se a mesma como letra predicativa não definida.

Definição 4.2 *A função a é um conjunto se, e somente se, para todo x a imagem de x por a é $\bar{1}$ ou $\bar{0}$. $C(a)$ significa que a é um conjunto.*

Em símbolos, temos

$$C(a) \Leftrightarrow \forall x([a, x] = \bar{1} \vee [a, x] = \bar{0})$$

Axioma 2: Para todo a existe b tal que para todo t, se a imagem de t por a é $\bar{1}$ então a imagem de t por b é $\bar{1}$ e se a imagem de t por a é diferente de $\bar{1}$ então a imagem de t por b é $\bar{0}$. Ou, em símbolos,

$$\forall a \exists b \forall t(([a, t] = \bar{1} \Rightarrow [b, t] = \bar{1}) \wedge ([a, t] \neq \bar{1} \Rightarrow [b, t] = \bar{0}))$$

Esse axioma garante que para toda função existe um conjunto correspondente. Trata-se de um axioma bastante estratégico, principalmente quando quisermos provar que os axiomas de ZF traduzidos para a linguagem de $\mathcal{N}$ são todos teoremas em $\mathcal{N}$.

Axioma 3: Sejam a e b funções tais que para toda função x, as imagens são iguais. Logo, as funções são iguais. Ou, em símbolos,

$$\forall a \forall b(\forall x([a, x] = [b, x]) \Rightarrow a = b))$$

Esse é o axioma da extensionalidade.

Intuitivamente, esse axioma nos diz que as imagens caracterizam univocamente as funções.

Teorema 4.1 *: Para quaisquer funções a e b e para toda função x, se as funções são iguais então as imagens são iguais. Ou, em símbolos,*

$$\forall a \forall b(a = b \Rightarrow \forall x(([a, x] = [b, x])))$$

Demonstração: Sabemos que $[a,x] = [a,x]$, pois igualdade é uma relação de equivalência, logo é reflexiva. Por hipótese, $a = b$; assim em qualquer ocorrência livre de a podemos substituir a por b, pelo axioma da substitutividade de igualdade. Dessa forma, temos $[a,x] = [b,x]$, como queríamos provar.

Axioma 4: Existe uma função a para toda função x tal que a imagem de x por a é diferente de $\bar{1}$. Ou, em símbolos,

$$\exists a \forall x([a,x] \neq \bar{1})$$

Esse é o axioma da função vazia, que tem seu análogo em ZF: o axioma do conjunto vazio.

Com esse axioma temos portanto a existência, a princípio, de várias funções vazias; porém, quando a imagem for igual a $\bar{0}$, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.2 : *Se existe a tal que para todo x a imagem de x por a é igual a $\bar{0}$, então a é o conjunto vazio. Além disso, a é único. Em símbolos,*

$$\exists a \forall x([a,x] = \bar{0}) \Rightarrow C(a) \wedge a \text{ é único}$$

Demonstração: a é conjunto se para todo x, $[a,x] = \bar{0}$ ou $[a,x] = \bar{1}$. Por hipótese, existe uma função a tal que $[a,x] = \bar{0}$, logo a é o conjunto que não tem elementos. Para provar que a é único, vamos supor que existem conjuntos a e b tais que $[a,x] = \bar{0}$ e $[b,x] = \bar{0}$ para todo x. Logo, temos que $[a,x] = [b,x]$ e pelo axioma 3 (da extensionalidade), os conjuntos são iguais e o teorema está provado.

Observação 4.1 *O conjunto a que não tem elementos é denotado por* $\emptyset$ *e dizemos que a é o conjunto vazio.*

Axioma 5: Para quaisquer funções x e y, existe uma função a tal que para toda função t, a imagem de t por a é $\bar{1}$ se, e somente se, t é igual a x ou t é igual a y. Ou, em símbolos,

$$\forall x \forall y \exists a \forall t([a,t] = \bar{1} \Leftrightarrow t = x \vee t = y)$$

Esse é o axioma da função par.

Observação 4.2 *i) Denotamos a por* $\{x, y\}$. $\{x, y\}$ *é chamado de par não ordenado.*

ii) Podem haver outras funções a, mas o conjunto correspondente é único.

Analogamente ao que acontece em ZF, o conjunto unitário é definido como se segue:

Definição 4.3 $\{x\} =_{def} \{x, x\}$

Definição 4.4 *Uma função* x *está contida em uma função* a *se, e somente se, para toda função* y*, a imagem de* y *por* x *é* $\bar{1}$ *implica que a imagem de* y *por* a *é* $\bar{1}$*. Aqui, estar contido é denotado por* $\subseteq$*. Em símbolos, temos*

$$x \subseteq a \Leftrightarrow \forall y([x,y] = \bar{1} \Rightarrow [a,y] = \bar{1})$$

Essa definição tem intuição parecida com a definição de "estar contido" em ZF, pois lá temos $x \subseteq A \Leftrightarrow \forall y(y \in x \Rightarrow y \in A)$.

Axioma 6: Para toda função a existe uma função b tal que para toda função x, a imagem de x por b é $\bar{1}$ se, e somente se, x está contido em a. Ou, em símbolos,

$$\forall a \exists b \forall x([b, x] = \bar{1} \Leftrightarrow x \subseteq a)$$

Esse é o axioma da função potência.

O axioma seguinte na verdade é um esquema de axiomas.

Axioma 7: Para toda função y existe uma função a tal que para toda função x, a imagem de x por a é $\bar{1}$ se, e somente se, a imagem de x por y é $\bar{1}$ e $F(x)$ (onde $F(x)$ é uma fórmula na qual todas as ocorrências de x são livres em $F(x)$, mas não há ocorrência de a). Ou, em símbolos,

$$\forall y \exists a \forall x([a, x] = \bar{1} \Leftrightarrow [y, x] = \bar{1} \wedge F(x))$$

Esse é o esquema da separação.

Axioma 8: Se para toda função x existe uma única função a tal que $\alpha(x, a)$ então para toda função z existe uma função w tal que para toda função t, a imagem de t por w é $\bar{1}$ se, e somente se, existe um conjunto s tal que a imagem de s por z é $\bar{1}$ e $\alpha(s, t)$. Ou, em símbolos,

$$\forall x \exists! a \alpha(x, a) \Rightarrow (\forall z \exists w \forall t([w, t] = \bar{1}) \Leftrightarrow \exists_C s([z, s] = \bar{1} \wedge \alpha(s, t)))$$

Esse é o esquema da substituição.

Observação 4.3 *Uma fórmula $\alpha(x, y)$ (onde x e y são variáveis de ocorrência livre) é x-funcional se, para cada x, existe um único y tal que $\alpha(x, y)$.*

Axioma 9: Para todo a existe b tal que para todo x, a imagem de x por b é $\bar{1}$ se, e somente se, existe um conjunto y tal que a imagem de x por y é $\bar{1}$ e a imagem de y por a é $\bar{1}$. Em símbolos,

$$\forall a \exists b \forall x([b, x] = \bar{1} \Leftrightarrow \exists_C y([y, x] = \bar{1} \wedge [a, y] = \bar{1}))$$

Esse é o axioma da função união, que tem seu análogo em ZF: o axioma do conjunto união.

Com esse axioma temos, portanto, a existência de várias funções união.

Observação 4.4 *A função união b é denotada por $\cup_{y \in a} y$.*

Definição 4.5 *Para duas funções u e v, definimos a união como: $u \cup v = \cup_{y \in \{u,v\}} y$.*

Definição 4.6 $z = \cup_C x \Leftrightarrow z = \cup x \wedge C(z)$

Observação 4.5 *Na definção acima, lê-se z é a união que é conjunto.*

Axioma 10: Existe a tal que a imagem do $\emptyset$ por a é $\bar{1}$ e para todo y se a imagem de y por a é $\bar{1}$ então para todo z se z contém y então a imagem de z por a é $\bar{1}$. Ou, em símbolos,

$$\exists a([a, \emptyset] = \bar{1} \wedge \forall y([a, y] = \bar{1} \Rightarrow \forall z(z \supset y \Rightarrow [a, z] = \bar{1})))$$

Esse é o axioma da função infinita.

Axioma 11: Para todo x tal que para todo y para todo z se a imagem de y por x é $\bar{1}$ e a imagem de z por x é $\bar{1}$ e y diferente de z implicam que y diferente do vazio e a intersecção de y e z é vazia então existe t para todo r tal que se a imagem de r por x é $\bar{1}$ então existe w tal que a intersecção de t e r é o unitário de w. Ou, em símbolos,

$$\forall x(\forall y \forall z(([x,y] = \bar{1} \wedge [x,z] = \bar{1} \wedge y \neq z) \Rightarrow (y \neq \emptyset \wedge y \cap z = \emptyset)) \Rightarrow$$
$$\exists t \forall r([x,r] = \bar{1} \Rightarrow \exists w(t \cap r = \{w\})))$$

Esse é o axioma da escolha.

Os próximos axiomas têm um caráter peculiar, pois em ZF não há análogos. Esses axiomas têm o objetivo de garantir a existência de certas funções, já que esta teoria deve retratar a intuição que temos sobre funções.

Axioma 12: Existe uma função a tal que para toda função x, a imagem de x por a é igual a x. Ou, em símbolos,

$$\exists a \forall x([a,x] = x)$$

Esse axioma nos garante a existência da função identidade.

Axioma 13: Para toda função u, existe uma função a tal que para toda função x, se $u \neq \bar{1}$ então a imagem de x por a é igual a u. Ou, em símbolos,

$$\forall u \exists a \forall x(u \neq \bar{1} \Rightarrow [a,x] = u)$$

Esse axioma nos garante a existência da função constante.

Axioma 14: Para quaisquer funções x e y existe uma função a tal que a imagem do par (x, y) é igual a x. Ou, em símbolos,

$$\forall x \forall y \exists a([a,(x,y)] = x)$$

Esse axioma nos garante a existência da função "primeira componente".

Axioma 15: Para quaisquer funções x e y existe uma função a tal que a imagem do par (x, y) é igual a y. Ou, em símbolos,

$$\forall x \forall y \exists a([a,(x,y)] = y)$$

Esse axioma nos garante a existência da função "segunda componente".

Com esses dois últimos axiomas, podemos conseguir a função n-ésima componente. Basta considerar x como sendo um termo formado por $n-1$ variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ e y como a variável x_n e aplicar o axioma 15.

Axioma 16: Para toda função y existe uma função a para toda função x tal que a imagem do par (x, y) por a é igual a imagem de y por x. Ou, em símbolos,

$$\forall y \exists a \forall x([a,(x,y)] = [x,y])$$

Esse axioma nos garante a existência de uma função de duas variáveis que pode ser reduzida a uma função de uma variável.

Axioma 17: Sejam as funções a e b. Então existe uma função c tal que a imagem de x por c é igual ao par $([a,x],[b,x])$. Ou, em símbolos,

$$\forall a \forall b \exists c \forall x([c,x] = ([a,x],[b,x]))$$

Esse axioma nos garante a existência de uma função cuja imagem é uma n-upla ordenada.

Axioma 18: Sejam as funções a e b. Então existe uma função c tal que a imagem de x por c é igual a imagem da imagem de x por b por a. Ou, em símbolos,

$$\forall a \forall b \exists c \forall x([c,x] = [a,[b,x]])$$

Esse axioma nos garante a existência da função composta.

Definição 4.7 *Um termo é construido pelas variáveis e algumas constantes (que são funções) por meio das operações* $[\ ,\ ]$ *e* $(\ ,\ )$. *Este será denotado por* $\mathcal{U}\ (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Definição 4.8 *Seja uma função* y *representada por* $[f,x]$, *isto é,* $y = [f,x]$. *Diz-se que* $[f,x]$ *é a forma normal para* y.

Teorema 4.3 (Redução) : *Seja* $\mathcal{U}\ (x_1, x_2, ..., x_n)$ *um termo e* $x_1, x_2, ..., x_n$ *funções. Então existe uma função* a *tal que*

$$\mathcal{U}(x_1, x_2, ..., x_n) = [a, ((...((x_1, x_2), x_3), ...), x_n)])$$

Ou, em símbolos,

$$\forall \mathcal{U}(x_1, x_2, ..., x_n) \exists a (\mathcal{U}(x_1, x_2, ..., x_n) = [a, ((...((x_1, x_2), x_3), ...), x_n)])$$

Demonstração: A demonstração é feita por indução.

Passo 1(passo base): $\mathcal{U}(x_1) = [a, x_1]$ (vale para $n = 1$) Temos então que:

(i) $\mathcal{U}(x_1) = x_1$ Nesse caso, pelo axioma 12, existe uma função a, tal que $[a, x_1] = x_1$ e, portanto, $\mathcal{U}(x_1) = [a, x_1]$.

(ii) $\mathcal{U}(x_1) = (x_1, x_1)$ Nesse caso, pelo axioma 12, existe uma função b e uma função c, tal que $[b, x_1] = x_1$ e $[c, x_1] = x_1$, respectivamente (nada impede que b e c sejam iguais). Pelo axioma 17, para quaisquer funções b e c, existe uma função a, tal que $[a, x_1] = ([b, x_1], [c, x_1]) = (x_1, x_1)$ e, portanto, $\mathcal{U}(x_1) = [a, x_1]$.

(iii) $\mathcal{U}(x_1) = [x_1, x_1]$ Nesse caso, pelo axioma 12, existe uma função $a = x_1$, tal que $[a, x_1] = x_1$ e portanto $\mathcal{U}(x_1) = [a, x_1]$.

Passo 2(passo da indução): Se

$$\mathcal{U}(x_1, x_2, ..., x_n) = [a, ((...((x_1, x_2), x_3), ...), x_n)]$$

então

$$\mathcal{U}(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}) = [a, ((...((x_1, x_2), x_3), ...), x_n), x_{n+1})]$$

De fato, pois

$$\begin{aligned}
[a, ((...((x_1, x_2), x_3), ...), x_n), x_{n+1})] &= [a, (\mathcal{U}(x_1, x_2, ..., x_n), x_{n+1})] \\
&= (\mathcal{U}(x_1, x_2, ..., x_n), x_{n+1})(\text{pelo axioma 12} \\
&= ([a, ((...((x_1, x_2), x_3), ...), x_n)], x_{n+1})(\text{por} \\
&= (((...((x_1, x_2), x_3), ...), x_n), x_{n+1})(\text{pelo a} \\
&= \mathcal{U}(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})
\end{aligned}$$

Portanto, o teorema está provado.

Com esse teorema, obtemos uma forma normal para termos em n variáveis, a saber, $[a, ((...((x_1, x_2), x_3), ...), x_n)]$ que é a função geral de n variáveis, e assim [a,x] é a função geral de uma variável.

Axioma 19: Existe a tal que para todo x e para todo y, $x = y$ se, e somente se, $[a, (x, y)] \neq \bar{1}$. Ou, em símbolos,

$$\exists a \forall x \forall y (x = y \Leftrightarrow [a, (x, y)] \neq \bar{1})$$

Esse axioma nos permite obter uma forma normal para a função identidade, isto é, $x = y$ implica que o par ordenado (x, x) não pertence à função a, e vice-versa.

Axioma 20: Para todo a existe b tal que para todo x, $[b, x] \neq \bar{1}$ se, e somente se, $[a, (x, y)] = \bar{1}$. Ou, em símbolos,

$$\forall a \exists b \forall x ([b, x] \neq \bar{1} \Leftrightarrow [a, (x, y)] = \bar{1})$$

Esse axioma nos permite obter uma forma normal para as funções x que não pertencem a uma função b.

Axioma 21: Para todo a existe b e para todo x existe um único y tal que se a imagem do par (x, y) por a é diferente de $\bar{1}$, então a imagem de x por b é igual a y. Ou, em símbolos,

$$\forall a \exists b \forall x \exists ! y ([a, (x, y)] \neq \bar{1} \Rightarrow [b, x] = y)$$

Esse axioma nos permite obter explicitamente uma função y que é dada implicitamente por $[a,(x,y)] \neq \bar{1}$.

A partir dos axiomas 19 e 21, podemos obter o axioma 12 como teorema, como mostramos a seguir:

Pelo axioma 19, temos que $\exists a \forall x \forall y (x = y \Leftrightarrow [a,(x,y)] \neq \bar{1})$. Logo, obtemos $[a,(x,y)] \neq \bar{1}$, o que pelo axioma 21, $\forall a \exists b \forall x \exists ! y([a,(x,y)] \neq \bar{1} \Rightarrow [b,x] = y)$, obtemos $\exists b \forall x \exists ! y([b,x] = y)$ e portanto, chamando b de a e sendo $x = y$, tem-se $\exists a \forall x([a,x] = x)$.

Definição 4.9 *O produto cartesiano de x por y é f se, e somente se, para quaisquer funções a e b, tem-se que as imagens de a por x são $\bar{1}$ e b por y são $\bar{1}$ se, e somente se, a imagem do par (a,b) é $\bar{1}$. Em símbolos,*

$$x \times y = f \Leftrightarrow \forall a \forall b([x,a] = \bar{1} \wedge [y,b] = \bar{1} \Leftrightarrow [f,(a,b)] = \bar{1})$$

Definição 4.10 *Dizemos que f é relação com domínio x e codomínio y se, e somente se, f está contida em $x \times y$. Em símbolos,*

$$f_{x \times y} \Leftrightarrow f \subset x \times y$$

Observação 4.6 $f_{x \times y}$ *lê-se "f é relação com domínio x e codomínio y".*

Definição 4.11 *Dizemos que o complementar de x é y se, e somente se, para todo w tem-se que a imagem de w por x é $\bar{1}$ se, e somente se, a imagem de w por y é diferente de $\bar{1}$. Em símbolos,*

$$x^C = y \Leftrightarrow \forall w([x,w] = \bar{1} \Leftrightarrow [y,w] \neq \bar{1})$$

Observação 4.7 *x^C lê-se "complementar de x".*

Aqui, há um abuso de notação devido à existência de vários complementares, mas não deve gerar confusão.

Na teoria de Zermelo-Fraenkel, a noção intuitiva é conjunto, ou seja, todos os termos são chamados de conjuntos. E portanto, define-se função.

Já nessa teoria de conjuntos $\mathcal{N}$, a noção intuitiva é função, ou seja, todos os termos são funções. E, portanto, define-se conjunto.

Vamos agora comentar algumas das modificações feitas no artigo original de von Neumann.

Como já foi mencionado, uma das alterações feitas é com relação às constantes individuais que em VN eram A e B, e que aqui preferimos utilizar $\bar{0}$ e $\bar{1}$ pela relação que há com função característica.

Consideramos aqui o universo como sendo de funções; logo não há distinção entre função e argumento, como o fez originalmente von Neumann.

Outra alteração é com respeito à pertinência, que em VN é definida da seguinte forma: $x \in a \Leftrightarrow [a, x] \neq \bar{0}$. A razão pela qual fizemos essa modificação é apenas para obtermos ZF mais facilmente. Trata-se de uma questão técnica.

Também eliminamos a letra A, onde $A(x)$ significava que x era argumento. Isto foi feito de modo a não permitir classes, pois em certo sentido poderíamos ter funções que não seriam mapeadas por ninguém. Por esta razão aqui não há distinção entre classe e conjunto. Há dois motivos para justificar essa simplificação. Primeiro, fica mais fácil elaborar uma teoria com menos conceitos. Segundo, desconhecemos aplicações relevantes de classes em física.

Alguns dos axiomas de VN foram eliminados, pois apenas diziam de que forma eram obtidos os argumentos e as funções.

Por fim devemos alertar para o fato de que incluímos alguns axiomas para garantir que ZF está "dentro" dessa nova teoria, isto é, para obtermos as traduções dos axiomas de ZF como teoremas em $\mathcal{N}$.

Feitas essas justificativas, vamos agora à seguinte questão: por que a preocupação para que ZF esteja "inserida" em nossa teoria? Simplesmente para garantir que temos toda a matemática usual e, portanto, todos os resultados obtidos até agora na matemática tradicional, também válidos na teoria $\mathcal{N}$.

4.2 ZF Está em $\mathcal{N}$

Nesta Seção, mostramos que a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel está "inserida" na teoria $\mathcal{N}$ aqui desenvolvida.

Primeiramente, definimos o seguinte:

Definição 4.12 $FT(x) =_{def} x \cup_C (\cup_C x) \cup_C (\cup_C(\cup_C x)) \cup_C \cdots$

Observação 4.8 *Na definição acima, $FT(x)$ lê-se fecho transitivo de x.*

Existe mais de um fecho transitivo para cada x, pois em $\mathcal{N}$ existem várias funções união.

Para provar que ZF está "inserida" em $\mathcal{N}$, definimos o seguinte predicado $D(x)$.

Definição 4.13 *Uma função x satisfaz o predicado D se, e somente se, x é conjunto e para todo $y = FT(x)$, se z pertence a y então z é conjunto. Ou, em símbolos,*

$$D(x) \Leftrightarrow C(x) \wedge \forall y = FT(x)(z \in y \Rightarrow C(z))$$

Observação 4.9 *As funções x que satisfazem a definição acima são objetos especiais, isto é, são conjuntos de conjuntos. Ou ainda, dizemos então que esses x são objetos clássicos ou* Dinge.

Para que possamos provar que a tradução de todos os axiomas de ZF são teoremas em $\mathcal{N}$, vamos usar quantificadores relativizados a esses objetos clássicos, ou seja, na tradução dos axiomas de ZF, sempre que tivermos "para todo *Dinge*" vamos considerar todas as funções que são conjuntos e cujos elementos também são conjuntos; agora para a expressão "existe um *Dinge*" vamos considerar a existência de funções que são conjuntos e cujos elementos também são conjuntos.

Na tradução, consideramos então que: $\exists_D x(A(x)) \Leftrightarrow \neg\forall_D x(\neg A(x))$.

Para facilitar a compreensão dos teoremas traduzidos, consideramos a seguinte tabela de tradução:

ZF	$\mathcal{N}$
$\forall$	$\forall_D$
$\exists$	$\exists_D$
$\in$	$\in$
$\subseteq$	$\subseteq$

Apresentamos agora a tradução dos axiomas de ZF que aqui são obtidos como teoremas de $\mathcal{N}$.

Teorema 4.4

$$\forall_D a \forall_D b(\forall_D x(x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow a = b))$$

Esse é o axioma da extensionalidade de ZF traduzido para $\mathcal{N}$.

Demonstração: Pelo axioma 3 (da extensionalidade) temos que para quaisquer funções a e b tal que para todo x se as imagens são iguais, então as funções são iguais. Pelo axioma 2, para toda função existe um conjunto correspondente, em particular para as funções a e b. Logo, para quaisquer *Dinge* a e b, existem conjuntos correspondentes. Assim, a e b são conjuntos de conjuntos (isto é, *Dinge*), e portanto temos que se os *Dinge* a e b têm os mesmos elementos x, então eles são iguais. □

Teorema 4.5 *Existe um* Dinge *a tal que para todo* Dinge *x, não é que x pertence a a. Ou, em símbolos,*

$$\exists_D a \forall_D x(\neg x \in a)$$

Esse é o axioma do conjunto vazio de ZF traduzido para $\mathcal{N}$.

Demonstração: Pelo axioma 4 (da função vazia), sabemos que existem funções vazias e pelo axioma 2 temos que para toda função existe um conjunto correspondente, em particular a é conjunto. Assim, sabemos pelo axioma 4 que $\forall x([a, x] \neq \bar{1})$ e sendo a conjunto, temos $\forall x([a, x] = \bar{0})$, em particular para x conjunto, pois, pelo axioma 2, para toda função existe um conjunto correspondente.□

Teorema 4.6 *Dados quaisquer* Dinge x *e* y, *existe um* Dinge a *tal que para todo* Dinge t, t *pertence a* a *se, e somente se,* t *é igual a* x *ou* t *é igual a* y. *Ou, em símbolos,*

$$\forall_D x \forall_D y \exists_D a \forall_D t (t \in a \Leftrightarrow t = x \vee t = y)$$

Esse é o axioma do par de ZF traduzido em $\mathcal{N}$.

Demonstração: Pelo axioma 5 (da função par), sabemos que para quaisquer funções x e y, existe a tal que para todo t, t pertence a a se, e somente se, $t = x$ ou $t = y$. Pelo axioma 2, para toda função existe um conjunto correspondente, em particular x e y são conjuntos. Logo, para quaisquer conjuntos x e y, existe uma função a, em particular a é conjunto pelo axioma 2, tal que para todo t, que em particular pelo axioma 2 também é conjunto, temos que $t \in a \Leftrightarrow t = x \vee t = y$, isto é a é conjunto de conjuntos. □

Teorema 4.7 *Para todo conjunto de conjuntos* a *existe um conjunto de conjuntos* b *tal que para todo conjunto de conjuntos* x, x *pertence a* b *se, e somente se,* x *está contido em* a. *Ou, em símbolos,*

$$\forall_D a \exists_D b \forall_D x (x \in b \Leftrightarrow x \subseteq a)$$

Esse é o axioma do conjunto potência de ZF traduzido para $\mathcal{N}$.

Demonstração: Pelo axioma 6 (da função potência), sabemos que para toda função a existe uma função b tal que para toda função x, a imagem de x por b é $\bar{1}$ se, e somente se, x está contido em a.

Assim, pelo axioma 2, seja a conjunto, logo também pelo axioma 2, existe um conjunto b tal que para todo x (que é conjunto pelo axioma 2), $x \in b \Leftrightarrow x \subseteq a$. Portanto, b é um conjunto de conjuntos. □

Teorema 4.8 *Para todo conjunto de conjuntos y existe um conjunto de conjuntos a tal que para todo conjunto de conjuntos x, x pertence a a se, e somente se, x pertence a y e $F(x)$ (onde $F(x)$ é uma fórmula na qual todas as ocorrências de x são livres, mas não há ocorrência de a). Ou, em símbolos,*

$$\forall_D y \exists_D a \forall_D x (x \in a \Leftrightarrow x \in y \wedge F(x))$$

Esse é o esquema da separação de ZF traduzido para $\mathcal{N}$.

Demonstração: Pelo axioma 7 (esquema da separação), sabemos que para toda função y existe uma função a tal que para toda função x, a imagem de x por a é $\bar{1}$ se, e somente se, a imagem de x por y é $\bar{1}$ e $F(x)$. Assim, pelo axioma 2, para toda função existe um conjunto correspondente. Logo, para y conjunto existe um conjunto a tal que para todo conjunto x, x pertence a a se, e somente se, x pertence a y e $F(x)$. Portanto, a é um conjunto de conjuntos. □

Teorema 4.9 *Se para todo conjunto de conjuntos x existe um único conjunto de conjuntos a tal que $\alpha(x, a)$ então para todo conjunto de conjuntos z existe um conjunto de conjuntos w tal que para todo conjunto de conjuntos t, t pertence a w se, e somente se, existe um* *conjunto de conjuntos s tal que s pertence a z e $\alpha(s,t)$. Ou, em símbolos,*

$$\forall_D x \exists_D ! a \alpha(x,a) \Rightarrow \forall_E z \exists_D w \forall_D t(t \in w \Leftrightarrow \exists_D s(s \in z \wedge \alpha(s,t)))$$

Esse é o esquema da substituição de ZF traduzido para $\mathcal{N}$.

Demonstração: Pelo axioma 8, sabemos que para toda função x existe uma única função a tal que $\alpha(x,a)$ então para toda função z existe uma função w tal que para toda função t, a imagem de t por w é $\bar{1}$ se, e somente se, existe um conjunto de conjuntos s tal que a imagem de s por z é $\bar{1}$ e $\alpha(s,t)$. Assim, pelo axioma 2, para toda função existe um conjunto correspondente. Logo, para x conjunto, existe um único conjunto a tal que $\alpha(x,a)$ então para z conjunto existe um conjunto w para todo conjunto t, t pertence a w se, e somente se, existe um conjunto s tal que s pertence a z e $\alpha(s,t)$. Portanto, se a é um conjunto de conjuntos, então w é um conjunto de conjuntos se, e somente se, s é um conjunto de conjuntos. $\square$

Teorema 4.10 *Para todo conjunto de conjuntos a existe um conjunto de conjuntos b tal que para todo conjunto de conjuntos x, x pertence a b se, e somente se, existe um conjunto de conjuntos y tal que x pertence a y e y pertence a a. Ou, em símbolos,*

$$\forall_D a \exists_D b \forall_D x(x \in b \Leftrightarrow \exists_D y(x \in y \wedge y \in a))$$

Esse é o axioma do conjunto união de ZF traduzido para $\mathcal{N}$.

Demonstração: Pelo axioma 9 (da função união), sabemos que para toda função a existe uma função b tal que para toda função x, a imagem de x por b é $\bar{1}$ se, e somente se, existe um conjunto de conjuntos y tal que a imagem de x por y é $\bar{1}$ e a imagem de y por a é $\bar{1}$. Assim, pelo axioma 2, para toda função existe um conjunto correspondente. Logo, para a conjunto existe um conjunto b para todo x conjunto, tal que x pertence a b se, e somente se, existe y conjunto (pelo axioma 2) tal que x pertence a y e y pertence a a. Portanto, b é um conjunto de conjuntos. □

Definição 4.14 *Uma função f é unitária se, e somente se, existe x tal que a imagem de x por f é $\bar{1}$ e para todo t, se t é diferente de x então a imagem de t por f é diferente de $\bar{1}$. Ou, em símbolos,* $[f] \Leftrightarrow \exists x([f,x] = \bar{1} \wedge \forall t(t \neq x \Rightarrow [f,t] \neq \bar{1}))$

Observação 4.10 *Na definição acima, $[f]$ lê-se f é unitária.*

Teorema 4.11 *Existe a tal que $\emptyset \in a$ e para todo y se y pertence a a implica que y união $\{y\}$ pertence a a. Ou, em símbolos,*

$$\exists_D a(\emptyset \in a \wedge \forall_D y(y \in a \Rightarrow y \cup \{y\} \in a))$$

Esse é o axioma do conjunto infinito de ZF traduzido em $\mathcal{N}$.

Demonstração: Pelo axioma 10, sabemos que existe um função a tal que a imagem do $\emptyset$ por a é $\bar{1}$ e para toda função y a imagem de y por a é $\bar{1}$ então para toda função z, se z contêm y então a imagem de z por a é $\bar{1}$. Assim, pelo axioma 2, para toda função existe um conjunto correspondente. Logo, existe um conjunto a

tal que $\emptyset$ pertence a a e para y conjunto, se y pertence a a então para todo z tal que z contém y temos para $z = y \cup \{y\}$ que z pertence a a. Portanto, a é um conjunto de conjuntos. □

Teorema 4.12 *Para todo conjunto de conjuntos x tal que se para todo conjunto de conjuntos y para todo conjunto de conjuntos z se y pertence a x e z pertence a x e y diferente de z implicam que y diferente do vazio e a intersecção de y e z é vazia então existe conjunto de conjuntos t tal que para todo conjunto de conjuntos r, se r pertence a x então existe conjunto de conjuntos w tal que a intersecção de t e r é o unitário de w. Ou, em símbolos,*

$$\forall_D x(\forall_D y \forall_D z((y \in x \wedge z \in x \wedge y \neq z) \Rightarrow y \neq \emptyset \wedge y \cap z = \emptyset)) \Rightarrow$$

$$\exists_D t \forall_D r(r \in x \Rightarrow \exists_D w(t \cap r = \{w\}))$$

Esse é o axioma da escolha de ZF traduzido em $\mathcal{N}$.

Demonstração: Pelo axioma 11 (da função escolha), sabemos que para toda função x tal que se para toda função y para toda função z se y pertence a x e z pertence a x e y diferente de z implicam que y diferente do vazio e a intersecção de y e z é vazia então existe função t para toda função r tal que se r pertence a x então existe função w tal que a intersecção de t e r é o unitária de w. Assim, pelo axioma 2, para toda função existe conjunto correspondente. Logo, para x, y e z conjuntos tal que $(y \in x \wedge z \in x \wedge y \neq z) \Rightarrow y \neq \emptyset \wedge y \cap z = \emptyset)$, então existe um conjunto t (pelo axioma 2) para todo conjunto r tal que se

r pertence a x então existe um conjunto w (pelo axioma 2) tal que $t \cap r = \{w\}$. Portanto, existe um conjunto de conjuntos t. $\square$

4.3 Considerações Gerais

Nesta Seção discutimos algumas variações da teoria $\mathcal{N}$ relacionadas ao acréscimo de axiomas de modo a se obter, por exemplo, teoria de categorias e teoria de conjuntos fuzzy. A relação entre as idéias de von Neumann e a teoria de categorias parece, à primeira vista, bastante natural, uma vez que categorias são universos de morfismos, ou seja, "funções" [8]. Já a relação com teoria de conjuntos fuzzy também parece natural, uma vez que conjuntos fuzzy são extensões da noção de função característica [29].

Considerando a seguinte definição, apresentamos um axioma que pode ser adicionado à lista de axiomas da teoria $\mathcal{N}$, obtendo assim uma teoria de categorias.

Definição 4.15 *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste do seguinte:*

1. *Uma coleção $Ob(\mathcal{C})$ cujos elementos são chamados de objetos de $\mathcal{C}$.*

2. *Uma coleção de conjuntos (X,Y), com X,Y em $\mathcal{C}$, satisfazendo $(X,Y) \cap (X',Y') = \emptyset$ a menos que $X = X'$ e $Y = Y'$. Cada elemento de (X,Y) é chamado de* morfismo *de X em Y e (X,Y) é chamado de conjunto de morfismos de X em Y.*

Denotamos $f \in (X,Y)$ *por* $f : X \to Y$.

3. *Para cada tripla* X, Y, Z *de objetos em* $\mathcal{C}$, *existe uma aplicação de conjuntos* $(X,Y) \times (Y,Z) \to (X,Z)$ *denotados por* $(f,g) \to gf$ *onde* gf *é chamada de* composição de morfismos $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$. *Estas aplicações* $(X,Y) \times (Y,Z) \to (X,Z)$ *devem satisfazer o seguinte:*

    (a) *Se* U, X, Y, Z *são objetos em* $\mathcal{C}$ *e* f *está em* (U,X), g *está em* (X,Y) *e* h *está em* (Y,Z), *então os elementos* $(hg)f$ *e* $h(gf)$ *em* (U,Z) *são iguais. Isso se traduz como associatividade da composição de morfismos.*

    (b) *Para cada objeto* X *em* $\mathcal{C}$, *existe um* f *em* (X,X) *tal que para cada objeto* Y *em* $\mathcal{C}$, *temos* $gf = g$ *para todo* g *em* (X,Y) *enquanto* $fh = h$ *para todo* h *em* (Y,X).

De acordo com esta definição, se adicionarmos o seguinte axioma à teoria $\mathcal{N}$ obteremos uma teoria de categorias.

Axioma 22: A composição de funções é associativa.

Os detalhes são deixados ao leitor, como a prova da existência de elementos neutros à esquerda e à direita na composição de morfismos.

Analogamente, podemos considerar $\bar{0}$ e $\bar{1}$ como ínfimo e supremo de um reticulado, e assim teremos uma teoria de conjuntos fuzzy. Isso seria bastante diferente da idéia original de Zadeh [29] o qual fundamentava sua "teoria de conjuntos fuzzy" na teoria usual de conjuntos.

Assim, observamos que $\mathcal{N}$ é uma teoria mais geral, de tal forma que adicionando alguns axiomas pode-se obter outras teorias como casos particulares.

Capítulo 5

Algumas Aplicações da Teoria $\mathcal{N}$

Neste Capítulo esboçamos algumas aplicações da teoria $\mathcal{N}$.

5.1 MSS-$\mathcal{N}$ sem tempo

Nesta Seção exibimos uma formulação para a mecânica newtoniana de partículas, sem menção explícita a tempo e fundamentada em $\mathcal{N}$, na esperança de que desse modo a notação presente nos axiomas seja mais simples do aquilo que se testemunha em MSS. Nossas idéias sobre mecânica newtoniana ainda estão inspiradas no sistema MSS original.

Definição 5.1 $\mathbb{P} = \langle s,m,f,g \rangle$ *é um sistema MSS-$\mathcal{N}$ se os seguintes axiomas forem satisfeitos:*

P1 *Existe um número finito não nulo de funções $p_1, p_2, ..., p_n$ tal que $[m, p_j]$, com $j = 1, ..., n$, é um número real positivo.*

Definição 5.2 *Uma função p é uma partícula se, e somente se, $[m, p]$ é um número real positivo.*

P2 *Existe um intervalo I não degenerado de números reais tal que para todo p para todo t se p é partícula e t pertence ao intervalo I, então* $[s,(p,t)] \in \mathbb{R}^3$.

P3 *Se p, q são partículas e $t \in I$ (onde I é o intervalo em* **P2***), então* $[f,(p,q,t)] \in \mathbb{R}^3$.

P4 *Se p é partícula e $t \in I$ (onde I é o intervalo em **P2**), então* $[g,(p,t)] \in \mathbb{R}^3$.

P5 *Para todo t, $t \in I$ (onde I é o intervalo em **P2**) e para todo p, se p é partícula então existe*

$$\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2}.$$

P6 *Se p e q são partículas e $t \in I$ (onde I é o intervalo em **P2**), então* $[f,(p,q,t)] = -[f,(q,p,t)]$.

P7 *Se p e q são partículas e $t \in I$ (onde I é o intervalo em **P2**), então* $[s,(p,t)] \times [f,(p,q,t)] = -([s,(q,t)] \times [f,(q,p,t)])$.

P8 *Se p e q são partículas e $t \in I$ (onde I é o intervalo em **P2**), então*

$$[m,p]\frac{d^2([s,(p,t)])}{dt^2} = \sum_q [f,(p,q,t)] + [g,(p,t)].$$

O produto vetorial aqui é denotado por $\times$. Portanto, em **P7** temos um produto vetorial. O somatório no último axioma é sobre partículas. A noção de "número finito" não nulo presente no axioma **P1** é garantida pelo fato de que ZF está "dentro" de $\mathcal{N}$. Portanto, faz sentido em se falar de conceitos usuais da matemática tradicional, incluindo a noção de derivada presente no axioma **P5**.

Observe o leitor que o número de axiomas diminuiu (caiu de 11 para 8), o número de conceitos também alterou (de 6 para 4) e não surge a necessidade de se falar em componentes de funções como fizemos anteriormente na descrição de MSS sem tempo em Zermelo-Fraenkel.

5.2 Teoria de Grupos Sem o Conjunto G em $\mathcal{N}$

Vimos no Capítulo 3, Seção 3.6, que o conjunto G é eliminável, isto é, definível a partir dos demais conceitos de grupo. Lá definimos grupo sem o conjunto G de elementos do grupo na teoria de Zermelo-Fraenkel.

Nesta Seção, vamos então definir grupo sem o conjunto G de elementos do grupo na teoria $\mathcal{N}$, somente para fins de ilustração.

Seja g uma função não nula tal que $\forall x[g, x] = \bar{1}$ ou $\bar{0}$, ou seja a função g é um conjunto.

Dizemos que a definição que se segue é a forma trivial de definir grupo em $\mathcal{N}$.

Definição 5.3 $\mathcal{G} = \langle *, e \rangle$ *é um grupo se, e somente se, satisfaz os seguintes axiomas:*

GC1 $x \in g \wedge y \in g \Rightarrow [*, (x, y)] \in g$

GC2 $[g, e] = \bar{1}$

GC3 $x \in g \wedge y \in g \wedge z \in g \Rightarrow [*, (x, [*, (y, z)])] = [*, ([*, (x, y)], z)]$

GC4 $x \in g \Rightarrow [*, (e, x)] = x = [*, (x, e)]$

$\boldsymbol{GC5}$ $x \in g \Rightarrow \exists y(y \in g \wedge [*, (y, x)] = e = [*, (x, y)]$

Capítulo 6

Em que Sentido Eliminamos Tempo?

Neste Capítulo, fazemos uma discussão sobre sistemas autônomos e não-autônomos no estudo de equações diferenciais [28] para responder a seguinte questão: se podemos eliminar tempo em certas teorias físicas, isso significa que em tais teorias todo sistema não autônomo pode ser reduzido a um sistema autônomo? A resposta para essa questão é negativa. Vamos analisar esse ponto sob dois aspectos: primeiro, quando dizemos " podemos eliminar tempo em certas teorias físicas" deve ficar claro que estamos eliminando a menção explícita ao conjunto T de instantes de tempo e não qualquer menção aos instantes t em si; segundo, em certos sistemas não-autônomos podemos de fato eliminar o parâmetro t, de modo a obter um sistema autônomo sem menção explícita a t. Discutimos um pouco disso adiante, com vistas a futuras discussões sobre descrições atemporais para teorias físicas.

6.1 Sistemas Autônomos e Não-autônomos

Considere equações da seguinte forma:

$$\dot{x} = f(x, t; \mu), \tag{6.1}$$

e

$$x \mapsto g(x; \mu), \tag{6.2}$$

onde $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, e $\mu \in V \subset \mathbb{R}^p$ onde U e V são conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$, respectivamente. Quando mencionamos que U e V são conjuntos abertos, estamos nos referindo à forma usual de se definir conjunto aberto: *um subconjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *chama-se* conjunto aberto *quando todos os seus pontos são interiores* ($\exists (a, b)$ *tal que* $\forall x \in (a, b) \subset A$, *ou seja, todos os pontos suficientemente próximos de* x *ainda pertencem ao conjunto* A), *isto é, quando* $int(A) = A$. O ponto em cima de x na equação 6.1 significa "$\frac{d}{dt}$" e a variável μ interpretamos como um parâmetro. No estudo de sistemas dinâmicos, a variável independente é freqüentemente referida como sendo "tempo". Também, neste trabalho, vamos nos referir à equação 6.1 como um campo vetorial ou equação diferencial ordinária e à equação 6.2 como uma aplicação ou mapa. A seguir, estabelecemos a seguinte terminologia:

Por uma solução de 6.1 entendemos uma aplicação x de algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$, a qual representamos como se segue

$$x : I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$t \mapsto x(t),$$

tal que $x(t)$ satisfaz 6.1, isto é,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t; \mu).$$

A aplicação x tem a interpretação geométrica de uma curva em $\mathbb{R}^n$ e a equação 6.1 fornece um vetor tangente em cada ponto da curva, daí a razão para nos referirmos à equação 6.1 como um campo vetorial. Quando falamos em *espaço de fase* de 6.1, estamos na verdade nos referindo ao espaço dos valores das variáveis dependentes de 6.1 (ou seja, $\mathbb{R}^n$). Aqui, tomamos o espaço de fase de nossas aplicações e os campos vetoriais como sendo conjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$ (sem implicar em perda de generalidade).

Feitas essas considerações, apresentamos agora a definição de sistemas autônomos e não autônomos que é dada em [28]. Considerando campos vetoriais, dizemos que aqueles que dependem explicitamente de tempo são *não autônomos*, ou ainda, que *não são autônomos* e aqueles que são independentes de tempo são *autônomos*. Apesar da falta de rigor, essas definições são bastante usuais.

Vamos agora dar alguns exemplos dos sistemas mencionados acima, para mostrar explicitamente a distinção entre eles.

Exemplo 6.1 *Descrever as trajetórias que passam pelo ponto* $(1,2)$ *para o sistema*

$$dx/dt = x \ , \qquad dy/dt = y. \tag{6.3}$$

O sistema que apresentamos é, claramente, um sistema autônomo, pois não depende explicitamente de tempo. É claro que poderíamos *obter um sistema não autônomo equivalente (admite as mesmas soluções). Basta considerar o sistema* $dx/dt = x + t - t$ *e* $dy/dt = y$.

Podemos visualizar esse problema imaginando que se estejam emitindo continuamente partículas no ponto $(1, 2)$, *que se movimentam no plano* xy *de acordo com as equações diferenciais 6.3. A partícula emitida no instante* $t = s$ *está caracterizada pelas condições iniciais* $x(s) = 1$, $y(s) = 2$. *Qual é a trajetória da partícula para* $t \geq s$*? A solução das equações 6.3 que obedece às condições iniciais mencionadas é*

$$x = \phi(t, s) = e^{t-s}, \qquad y = \psi(t, s) = 2e^{t-s}, \qquad t \geq s. \tag{6.4}$$

As trajetórias seguidas pelas partículas emitidas em diferentes instantes podem ser visualizadas pela eliminação de t *entre as equações 6.4. O que nos dá*

$$y = 2x, \tag{6.5}$$

onde temos, pelas equações 6.4, que $x \geq 1$, $y \geq 2$. *É importante notar que o instante inicial* s *não aparece explicitamente na equação 6.5. Portanto, qualquer que seja o instante da emissão da partícula, no ponto* $(1, 2)$, *ela sempre se desloca sobre a mesma curva. Só há* uma *trajetória que passa pelo ponto* $(1, 2)$.

Exemplo 6.2 *Descrever as trajetórias que passam pelo ponto* $(1, 2)$ *para o sistema*

$$dx/dt = x/t, \qquad dy/dt = y. \tag{6.6}$$

Observe que a primeira equação 6.6 envolve explicitamente t *no segundo membro da equação; então, o sistema 6.6 não é autônomo.*

A solução das equações 6.6 que obedece às condições iniciais $x(s) = 1$, $y(s) = 2$ *é*

$$x = \phi(t, s) = t/s, \qquad y = \psi(t, s) = 2e^{t-s}, \qquad t \geq s. \tag{6.7}$$

Resolvendo a primeira equação 6.7 temos $t = sx$. *Então, a substituição na segunda equação 6.7 nos leva a*

$$y = 2e^{s(x-1)}, \tag{6.8}$$

onde se tem $x \geq 1$. *Uma vez que* s *aparece na equação 6.8, a trajetória seguida por uma partícula depende do instante em que for emitida, isto é, do instante em que valem as condições iniciais. Assim, há uma infinidade de trajetórias que se originam no ponto* $(1, 2)$.

6.2 Teorema de Correspondência em Sistemas Não-autônomos

Nesta Seção, apresentamos alguns teoremas básicos que descrevem propriedades gerais das soluções de campos vetoriais.

Considere o campo vetorial

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{6.9}$$

onde $f(x, t) \in C^r$, $r \geq 1$, em algum aberto $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. O seguinte teorema garante a existência e unicidade somente para um intervalo de tempo suficientemente pequeno.

Teorema 6.1 *Seja* $(x_0, t_0) \in U$. *Então existe uma solução de 6.9 passando pelo ponto* x_0 *em* $t = t_0$, *denotada por* $x(t, t_0, x_0)$ *com*

$x(t_0, t_0, x_0) = x_0$, para $|t - t_0|$ suficientemente pequeno. Esta solução é única no sentido de que para qualquer outra solução de 6.9 pelo ponto x_0 em $t = t_0$ deve ser a mesma com $x(t, t_0, x_0)$ em seu intervalo comum de existência. E mais, $x(t, t_0, x_0)$ é uma função de classe C^r de t, t_0 e x_0.

Demonstração: Não apresentamos aqui, mas detalhes podem ser vistos em ([1], [10] e [7]).

Outro resultado importante, é que podemos estender unicamente o intervalo de tempo de existência, enunciado como se segue:

Seja $C \subset U \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto contendo (x_0, t_0).

Teorema 6.2 *A solução $x(t, t_0, x_0)$ pode ser unicamente estendida para frente ou para trás em t até a fronteira de C.*

Demonstração: Ver [7].

Na prática freqüentemente encontramos campos vetoriais dependentes do parâmetro μ, e é necessário diferenciar as soluções com respeito aos parâmetros. Assim, tem-se o seguinte resultado, o qual aborda esta situação.

Considere o campo vetorial

$$\dot{x} = f(x, t; \mu), \tag{6.10}$$

onde $f(x, t; \mu) \in C^r$, $r \geq 1$, em algum aberto $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$.

Teorema 6.3 *Para $(t_0, x_0, \mu) \in U$ a solução $x(t, t_0, x_0, \mu)$ é uma função de classe C^r, de t, t_0, x_0 e μ.*

Demonstração: Ver [1] ou [7].

Agora, vamos enunciar algumas propriedades especiais de campos vetoriais autônomos.

Campos Vetoriais Autônomos

Considere o campo vetorial autônomo

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6.11}$$

onde $f(x) \in C^r$ (lembrando que uma função pertence a C^r se é r vezes diferenciável e cada derivada é contínua; se $r = 0$ então a função é dita contínua), $r \geq 1$, em algum aberto $U \in \mathbb{R}^n$. Por simplicidade, vamos supor que as soluções existem para todo instante t.

Os seguintes resultados são muito úteis em aplicações, porém não apresentamos as respectivas provas, pois o objetivo aqui é discutir em que sentido estamos eliminando tempo nesses sistemas. Para detalhes a respeito das provas desses resultados, sugerimos [28].

Proposição 6.1 *Se $x(t)$ é uma solução de 6.11, então também é $x(t+\tau)$ para qualquer $\tau \in \mathbb{R}$.*

Proposição 6.2 *Para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe somente uma solução de 6.11 passando por este ponto.*

Proposição 6.3 i) $x(t, x_0) \in C^r$.

ii) $x(0, x_0) = x_0$.

iii) $x(t+s, x_0) = x(t, x(s, x_0))$.

Campos Vetoriais Não-Autônomos

Como vimos anteriormente, as proposições 6.1, 6.2 e 6.3 são válidas para campos vetoriais autônomos. Porém, sempre podemos mostrar a equivalência de um campo vetorial não-autônomo com uma classe de campos autônomos. Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 6.4 *A todo campo vetorial não-autônomo existe um sistema de campos vetoriais autônomos correspondentes.*

Demonstração: Considere a equação 6.11. Vamos reescrevê-la da seguinte forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(x,t)}{1} \tag{6.12}$$

Usando a regra da cadeia, introduzimos uma nova variável independente s tal que 6.12 torna-se

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &\equiv x' = f(x,t), \\ \frac{dt}{ds} &\equiv t' = 1. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Se definimos $y = (x,t)$ e $g(y) = (f(x,t), 1)$, vemos que 6.13 torna-se

$$y' = g(y), \qquad y \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \tag{6.14}$$

Portanto, conhecer as soluções de 6.14 implica conhecer as soluções de 6.9 e vice-versa.

No teorema acima, por exemplo, se $x(t)$ é uma solução de 6.9 pelo ponto x_0 em $t = t_0$, isto é, $x(t_0) = x_0$, então $y(s) = (x(s+t_0), t(s) = s + t_0)$ é uma solução de 6.14 passando por $y_0 \equiv (x(t_0), t_0)$ em $s = 0$.

6.3 Eliminabilidade do Parâmetro t em Sistemas Não-Autônomos

Sejam

$$dx/dt = F(x,y), \qquad dy/dt = G(x,y), \tag{6.15}$$

funções contínuas e com derivadas parciais contínuas num certo domínio D do plano xy.

As trajetórias de sistemas autônomos bidimensionais podem ser encontradas, como no exemplo 6.1, pela resolução do sistema seguida pela eliminação da menção ao parâmetro t.

Uma outra maneira, que em muitos casos é utilizada, é resolver a equação de primeira ordem relacionada ao sistema. Por exemplo, pelas equações 6.15 temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)} \tag{6.16}$$

que é uma equação de primeira ordem nas variáveis x e y. Podemos perceber aqui que, em alguns casos em que F e G são dependentes de t (isto é, o sistema é não-autônomo), é possível fazer uma redução desse sistema para um sistema autônomo. Assim, resolvendo-se a equação 6.16, suas soluções proporcionam uma equação para as trajetórias do sistema 6.15.

Por exemplo, no sistema do exemplo 6.1, temos

$$dy/dx = y/x, \tag{6.17}$$

cuja solução geral é $y = cx$. Se o ponto inicial for $(1,2)$, devemos escolher $c = 2$, de modo que $y = 2x$, com $x \geq 1$, é a equação da trajetória que passa por $(1, 2)$.

Como já mencionamos anteriormente, sistemas autônomos ocorrem com bastante freqüência em situações práticas. Fisicamente, isso significa que o sistema é independente do tempo. Intuitivamente, dizemos que as soluções desses sistemas são independentes do instante em as condições iniciais dadas são impostas.

Para esclarecer o que vimos acima, vamos dar o seguinte exemplo:

Exemplo 6.3 *Dado o sistema*

$$dx/dt = tx, \qquad dy/dt = ty. \tag{6.18}$$

encontremos as trajetórias que passam pelo ponto $(1, 2)$.

Primeiramente, observamos que este sistema é um sistema não-autônomo (depende de t*). Por outro lado, verificamos que as soluções podem ser obtidas resolvendo-se uma equação diferencial de primeira ordem relacionada ao sistema. Logo, temos*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{ty}{tx} = \frac{y}{x} \tag{6.19}$$

cuja solução já foi estudada em 6.17.

O exemplo que vimos acima nos diz que existem sistemas não autônomos que podem ser reduzidos a sistemas autônomos por meio de uma equação diferencial de primeira ordem.

Resumidamente, temos que existem sistemas autônomos e não autônomos; os sistemas não-autônomos podem ser divididos em dois grupos: os redutíveis e os irredutíveis. Dizemos que as soluções dos sistemas não autônomos redutíveis podem ser encontradas resolvendo-se uma equação diferencial de primeira ordem relacionada ao sistema. Já nos sistemas irredutíveis, não podemos resolvê-los dessa forma.

O que deve ficar claro aqui, é que estamos eliminando tempo no sentido de que as soluções encontradas não se alteram quando as condições iniciais são impostas.

Capítulo 7

Outras Teorias Físicas

Vimos no Capítulo 3, que em certas teorias físicas podemos eliminar certos conceitos primitivos. Assim, no Capítulo 4, desenvolvemos uma teoria de conjuntos $\mathcal{N}$ que tem como noção intuitiva a de função. Essa teoria $\mathcal{N}$, viabiliza, a princípio, formulações mais enxutas para teorias da física. No que segue abaixo discutimos a perspectiva futura da discussão sobre outras teorias físicas além de MSS.

7.1 Teorias de Campos

A definição que se segue foi originalmente dada em [4].

Definição 7.1 *Uma* teoria clássica de campos *é uma 9-upla ordenada*

$$\Sigma = \langle M, G, P, \mathcal{F}, \mathcal{A}, \mathcal{I}, \mathcal{B}, \nabla\varphi = \iota \rangle$$

onde

1. *M é uma variedade real suave de dimensão finita munida da métrica Riemaniana (associada ao espaço-tempo), G é um gru-*

po de Lie de dimensão finita (associado a transformações entre sistemas coordenados).

2. *P é um dado fibrado principal $P(M, G)$ sobre M com grupo de Lie G.*

3. *$\mathcal{F}$, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{I}$ são seções de fibrados associados a $P(M, G)$, o qual corresponde, respectivamente, ao espaço campo, espaço potencial, e corrente ou espaço origem.*

4. *$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}\rangle\{(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{G}'$ é o grupo simétrico, onde $Diff(M)$ é o grupo de difeomorfismos de M e $\mathcal{G}$ é o grupo de transformações de Gauge do fibrado principal $P(M, G)$.*

5. *$\nabla\varphi = \iota$ é uma equação de Dirac, onde $\varphi \in \mathcal{F}$ é um campo associado a seu potencial correspondente por meio de uma equação de campo e $\iota \in \mathcal{I}$ é uma corrente. Uma tal equação diferencial está sujeita às condições iniciais ou de contorno B.*

Teorema 7.1 *Espaço-tempo é dispensável em uma teoria clássica de campos.*

Demonstração: O Princípio de Padoa diz que o conceio primitivo M em Σ é independente dos demais conceitos primitivos se, e somente se, existem dois modelos de Σ tais que M tem duas interpretações e todos os outros símbolos primitivos têm a mesma interpretação. Mas estas duas interpretaccões não são possíeis, pois todos os outros conceitos, exceto $\mathcal{G}$, dependem do espaço-tempo M. Qualquer mudança na interpretação relacionada a M

implicará uma mudança de interpretação de P, $\mathcal{F}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{G}$, B, e $\nabla\varphi = \iota$. Portanto, espaço-tempo não é independente e logo pode ser definido. Assim, de acordo com o critério de eliminabilidade de definições, espaço-tempo é dispensável.

Vale notar que a definição de teoria clássica de campos permite um tratamento axiomático para a relatividade geral de Einstein, o eletromagnetismo de Maxwell, o elétton de Dirac, as teorias clássicas de *gauge* e a mecânica hamiltoniana. Para tanto, basta adequar as condições de contorno B. Detalhes podem ser encontrados em [4]. Isso significa que espaço-tempo é eliminável de tais teorias. Isso não deixa de ser surpreendente, principalmente na relatividade geral de Einstein, onde o espaço-tempo tem uma importantíssima interpretação física [27]. Uma discussão filosófica sobre esse resultado de eliminabilidade se faz necessária. Uma questão em aberto que aqui colocamos é como ficaria uma descrição de tais teorias de campos no âmbito da teoria $\mathcal{N}$. Poderíamos trabalhar única e exclusivamente com campos, potenciais e correntes, sem jamais mencionar explicitamente o espaço-tempo? E essa descrição ficaria em algum sentido mais atraente? Como seriam descritos os campos e potenciais, uma vez que usualmente os mesmos são entendidos como formas diferenciais correspondentes a fibrados vetoriais associados a um fibrado principal $P(M, G)$ definido sobre um espaço base M usualmente entendido como o espaço-tempo? Esse, esperamos, é um projeto para futuras pesquisas.

Capítulo 8

Questões em Aberto

Apresentamos aqui algumas questões para serem tratadas em trabalhos futuros.

1. Sabemos que nas teorias de *gauge* o espaço-tempo desempenha um papel fundamental tanto do ponto físico quanto matemático. No entanto, prova-se no teorema 7.1 que nessas mesmas teorias espaço-tempo é eliminável. A questão que levantamos é: como reformular as teorias de *gauge* no escopo de $\mathcal{N}$ de modo que tenhamos apenas campos, potenciais e correntes entre os conceitos primitivos?

2. Desenvolver uma teoria de categorias a partir do acréscimo do axioma 22 (ver Seção 4.3) aos axiomas de $\mathcal{N}$.

3. Estender a noção de conjunto em $\mathcal{N}$ de modo a incluir conjuntos fuzzy.

4. Desenvolver uma versão quase-conjuntista (ou seja, uma teoria sem igualdade nos moldes do que é feito em [11]) para a teoria

$\mathcal{N}$ no sentido de verificar se há interesse de aplicação das idéias aqui apresentadas nos fundamentos da mecânica quântica (ver [13]).

5. Verificar se princípio de Padoa vale em $\mathcal{N}$.

6. Verificar qual a relação que existe entre MSS como formulado em ZF e a formulação que apresentamos para a mecânica newtoniana de partículas devidamente fundamentada em $\mathcal{N}$.

Referências Bibliográficas

[1] Arnold, V. I. *Ordinary Differential Equations* (M. I. T. Press, Cambridge)

[2] Beth, E. W., 'On Padoa's method in the theory of definition', *Indag. Math.* pp. 330-339 (1953).

[3] Browder, F. E. (editor), *Mathematical Developments Arising from the Hilbert Problems*, (AMS, Providence, 1976).

[4] da Costa, N. C. A. e F. A. Doria, 'Suppes predicates for classical physics', In: J. Echeverria et al., eds., *The Space of Mathematics* (Walter de Gruyter, Berlin New York, 1992).

[5] da Costa, N. C. A. e A. S. Sant'Anna, 'The mathematical role of time and spacetime in classical physics', *Found. Phys. Lett.* **14** pp. 553-563 (2001).

[6] da Costa, N. C. A. e A. S. Sant'Anna, 'Time in thermodynamics', *Found. Phys.* **32**, pp. 1785-1796 (2002).

[7] Hale, J., *Ordinary Differential Equations* (Krieger Publishing Co., Malabar, 1980).

[8] Hatcher, W., *Foundations of Mathematics* (Filadélfia, W. B. Saunders, 1968).

[9] Hilbert, D. 'Mathematical problems' In: *Bull. Am. Math. Soc.* **37**, pp. 407-436 (2000).

[10] Hirsch, M. W. e S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra* (New York, Academic Press, 1974).

[11] Krause, D. 'On a quasi-set theory', *Notre Dame J. Formal Logic* **33**, pp. 402-411 (1992).

[12] Krause, D. 'Axioms for collections of indistinguishable objects', *Logique et Analyse* **153-154**, pp. 69-93 (1996).

[13] Krause, D., A. S. Sant'Anna e A. G. Volkov, 'Quasi-set theory for bosons and fermions: quantum distributions', *Fond. Phys. Lett.* **12**, pp. 51-66 (1999).

[14] Krause, D. *Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência* (São Paulo, EPU, 2002).

[15] McKinsey, J. C. C., 'On the independence of undefined ideas', *Bull. Am. Math. Soc.* **41**, pp. 291-297 (1935).

[16] McKinsey, J. C. C., A. C. Sugar, e P. Suppes, 'Axiomatic foundations of classical particle mechanics", *J. Rat. Mech. Anal.*, **2**, pp. 253-272 (1953).

[17] Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic* (Chapman & Hall, Londres, 1997).

[18] Padoa, A., 'Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque", *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie*, **3** 309-365 (1900).

[19] Sant'Anna, A. S., *Teoria-K no Problema das Cópias de* Gauge *e Outras Questões Sobre Categorias e os Fundamentos da Física*, Tese de Doutorado, FFLCH, USP, 1994.

[20] Sant'Anna, A. S., *O que é um Axioma*, (Manole, Barueri, 2003).

[21] Sant'Anna, A. S., *O que é uma Definição*, (no prelo).

[22] Suppes, P., *Introduction to Logic* (Princeton, van Nostrand, 1957).

[23] Suppes, P., *Representation and Invariance of Scientific Structures* (CSLI, Stanford, 2002).

[24] Tarski, A., 'Some methodological investigations on the definability of concepts', In: A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematic*, pp. 296-319 (Hacket Pub. Co., Indianapolis, 1983).

[25] Volkov, A. G., *Teoria de Categorias e Teoria de Conjuntos*, (Dissertação de Mestrado, FFLCH-USP, 1998).

[26] von Neumann, J. 'An axiomatization of set theory', In: van Heijenoort, J. (editor) *From Frege to Gödel* (Harvard Un. Press, Cambridge, 1967) pp. 393-413.

[27] Wald, R., *General Relativity* (Un. Chicago Press, Chicago, 1984).

[28] Wiggins, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (Springer-Verlag, Nova York, 1990).

[29] Zadeh, L. A., 'Fuzzy sets', *Information and Control* **8** pp. 338-353 (1965).